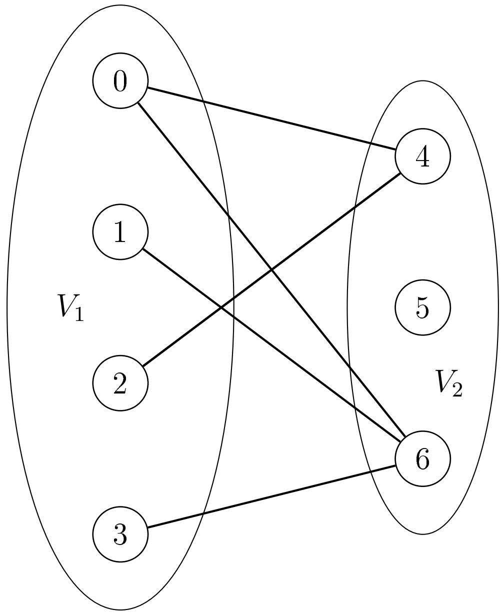
TD 9

Couplage de cardinal maximal dans un graphe biparti

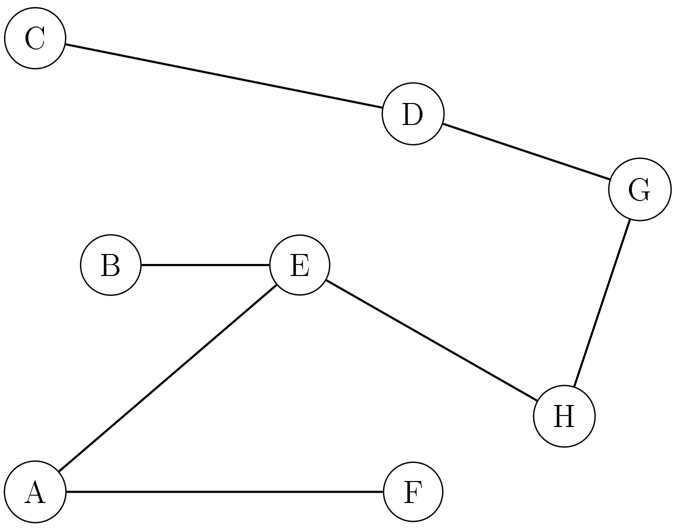
L'étude porte sur les graphes bipartis :

Définition 1 :
Un graphe $G = (V, E)$ est dit biparti s'il existe une partition de V en deux sous-ensembles $V_1 \cup V_2$, telle que toute arête du graphe relie un sommet de V_1 à un sommet de V_2.



1 Propriétés et théorème de König

1. On considère l'arbre A suivant :



   Montrer que A est un graphe biparti.

2. Montrer que tout arbre est un graphe biparti.

3. Montrer qu'un graphe acyclique est biparti.

Théorème 1 :

(dû König en 1916)
Un graphe est biparti si et seulement s'il ne possède pas de cycles de longueur impaire.
(la longueur d'un cycle est le nombre d'arêtes qui le compose.)

4. Montrer qu'un graphe possédant un cycle de longueur impaire ne peut être biparti.

5. On considère un graphe connexe G ne possède pas de cycles de longueur impaire. Soit x un sommet de G. On note, pour $s \in V$, $d(x, v)$ la distance de x à s. On pose :

$$V_1 = \{y \in V | d(x, v) \text{ impaire}\}$$

$$V_2 = \{y \in V | d(x, v) \text{ paire}\}$$

Montrer que V_1, V_2 forment une partition de V et qu'il n'existe pas d'arête entre deux sommets de V_1 et ni dans V_2.

6. Conclure.

2 Couplage dans un graphe biparti

Définition 2 :

Pour $G = (V, E)$ un graphe non orienté, on appelle couplage de G un sous-ensemble $C \subset E$ d'arêtes deux à deux non adjacentes, c'est-à-dire :

$$\forall a_1, a_2 \in C, a_1 \neq a_2 \Rightarrow a_1 \cap a_2 = \varnothing$$

Dans le graphe G_0, les arêtes $\{0_A, 0_B\}$ et $\{2_A, 3_B\}$ étant non incidentes, elles forment un couplage, nommé C_0, dont les arêtes sont dessinées en gras ci-contre ; on dit alors que dans ce couplage :

- le sommet 0_A est couplé au sommet 0_B, et réciproquement ;
- le sommet 2_A est couplé au sommet 3_B, et réciproquement ;
- les sommets 1_A, 3_A, 1_B et 2_B sont non couplés.

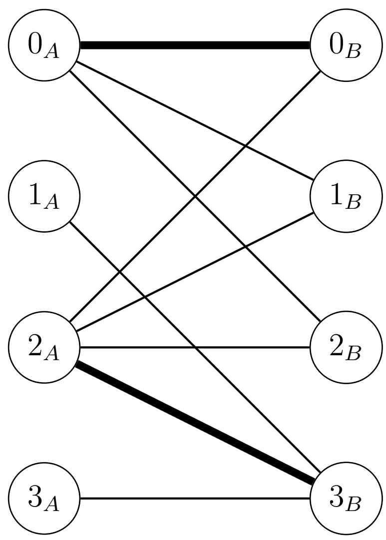


Figure 1 : le graphe G_0 et le couplage C_0

Définition 3 :

Couplage maximal, couplage de cardinal maximum

- On appelle couplage maximal un couplage maximal au sens de l'inclusion parmi les couplages : il n'est inclus dans aucun couplage de cardinal strictement supérieur.
- On appelle couplage de cardinal maximal un couplage dont le nombre d'arêtes est maximal parmi tous les couplages.

1. Justifier que dans l'exemple C_0 est un couplage maximal, mais pas un couplage de cardinal maximal.
2. Déterminer un couplage de cardinal maximum de G_0.

3 Chemin augmentant et recherche d'un couplage de cardinal maximum

Définition 4 :

Sommet exposé, sommet couvert

Soit $G = (V, E)$ un graphe biparti, et C un couplage de G. Un sommet $v \in V$ est dit :

- couvert par le couplage C s'il appartient à une arête de C ;
- exposé sinon.

Définition 5 :

Chemin alternant

Soit $G = (V, E)$ un graphe biparti, et C un couplage de G. Un chemin v_0, v_1, v_k dans G est dit alternant relativement à C, si :

- $\{v_0, v_1\} \notin C$;
- $\{v_1, v_2\} \in C$;
- $\{v_2, v_3\} \notin C$;
- etc...

Autrement dit, le chemin alterne entre des arêtes qui ne sont pas dans C et des arêtes qui sont dans C, en commençant par une arête qui n'est pas dans C. **Chemin augmentant**
Un chemin v_0, v_1, v_k dans G est dit augmentant si c'est un chemin alternant et si de plus :

- il est de longueur impaire ;
- ces deux extrémités sont exposées, c'est-à-dire qu'elles n'appartiennent à aucune arête du couplage.

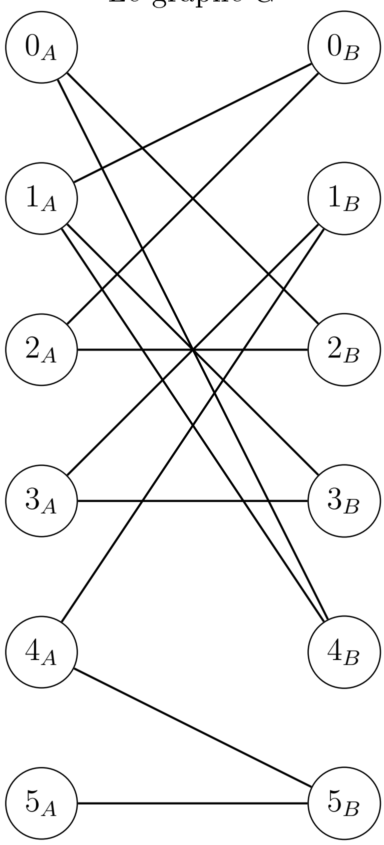
Exemple 1 :

Dans le graphe G_0, relativement au couplage C_0. :

- Le chemin $2_A, 0_B, 0_A, 2_B$ est alternant relativement à C_0, mais pas augmentant.
- Le chemin $1_A, 3_B, 2_A, 0_B, 0_A, 1_B$ est augmentant relativement à C_0.

1. Soit C un couplage d'un graphe biparti $G = (V, E)$, possédant un chemin augmentant. Montrer qu'il existe un couplage de G de cardinal $|C| + 1$.
2. Déterminer le couplage C_1 obtenu à partir de C_0 par la méthode précédente.
3. Pour le graphe suivant, déterminer un couplage de cardinal maximal :

Le graphe G



Le couplage de départ :