

TD 2

Dédution naturelle

Exercice 1 :

Donner pour chacun des séquents suivants la formule associée puis déterminer leur validité.

(a) $p \wedge \neg p \vdash$

(b) $(p \vee q \Rightarrow r), \neg(p \wedge z) \vdash \neg p, \neg z$

(c) $p \vee q \vdash p \Rightarrow r$

(d) \vdash

(e) $\perp \vdash$

Exercice 2 :

On considère les hypothèses :

- $H_1 := p \Rightarrow (q \Rightarrow r)$.
- $H_2 := q$

et la conclusion :

$$C := p \Rightarrow r.$$

Montrer la validité du séquent : $H_1, H_2 \vdash C$:

1. En utilisant la table de vérité.
2. En utilisant les règles de déductions.

Exercice 3 :

En utilisant les règles de déductions, montrer la validité des séquents suivants :

(a) $\vdash A \Rightarrow A$

(b) $\vdash \neg A \vee A$

Exercice 4 :

1. Déterminer la dérivation de : $\neg A \vee B \Rightarrow A \Rightarrow B$.
2. Déterminer la dérivation de : $(A \Rightarrow B) \Rightarrow \neg A \vee B$.

Exercice 5 :

Déterminer la dérivation de :

$$(p \vee q) \Rightarrow r \vdash p \Rightarrow r$$

Exercice 6 :

Déterminer la dérivation de :

$$\vdash (p \Rightarrow q \wedge r) \Rightarrow (p \Rightarrow q)$$

Exercice 7 :

Déterminer la dérivation de :

$$A \vdash B \Rightarrow (A \wedge B)$$

Exercice 8 :

En appliquant les règles de dérivation, montrer que le séquent suivant n'est pas valide :

$$r, s \vdash (r \Rightarrow (\neg p \Rightarrow q)) \wedge ((q \vee \neg p) \Rightarrow r)$$

Exercice 9 :

Soit le raisonnement suivant :

- Quand il fait soleil, je mets mes lunettes ou je ne sors pas.
- Je ne reste à la maison que sans lunettes et par temps gris.

Donc si je ne mets pas mes lunettes, c'est qu'il fait gris.

1. Formaliser ce raisonnement par un séquent en utilisant les variables suivantes :
 s : « il fait soleil », l : « je mets mes lunettes », m : « je reste à la maison. »
2. Montrer que le raisonnement ci-dessus est correct :
 - en utilisant la table de vérité ;
 - en utilisant la dérivation du séquent.