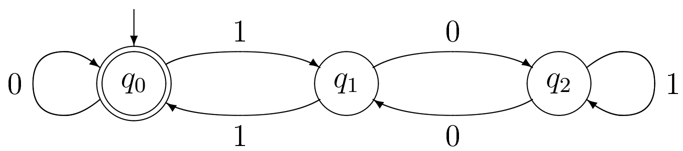
TD 11
Automates

Exercice 1 : On considère l'alphabet $\Sigma = \{0;1\}$.

1. Démontrer que l'automate suivant reconnait les entiers n écrits en base 2, qui sont divisibles par 3.



2. Déterminer un automate qui reconnait les entiers n écrits en base 2, qui sont divisibles par 2.

3. En déduire un automate qui reconnait les entiers n écrits en base 2, qui sont divisibles par 6.

Exercice 2 :

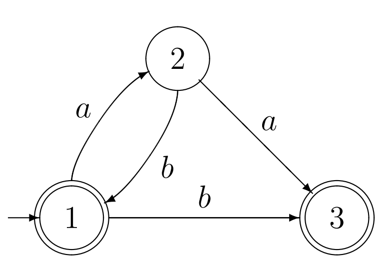
1. Trouver un automate qui reconnaît l'ensemble des mots sur l'alphabet $A = \{a, b\}$ qui ont au moins une fois la lettre a.

2. Trouver un automate qui reconnaît l'ensemble des mots sur l'alphabet $A = \{a, b\}$ qui contiennent le facteur aa.

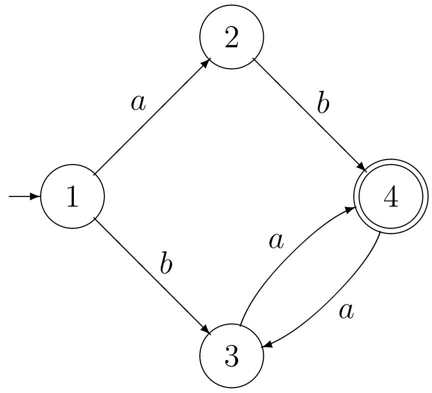
3. Trouver un automate qui reconnaît l'ensemble des mots sur l'alphabet $A = \{a, b\}$ qui se terminent par ab.

Exercice 3 : Donner une expression rationnelle représentant les langages reconnus par chacun des automates suivants :

(a)



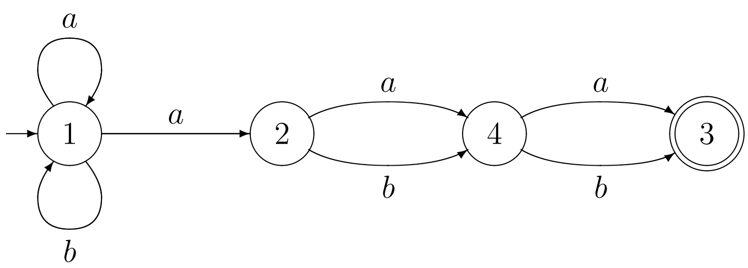
(b)



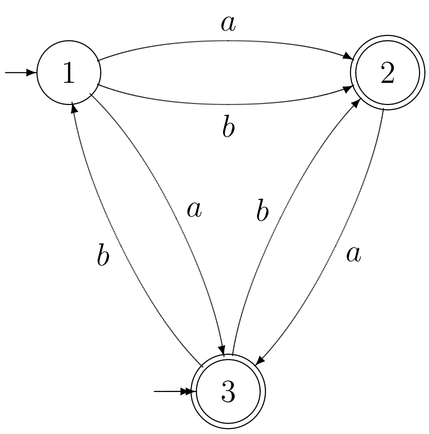
<u>Exercice 4 :</u> Soit automate fini $\mathcal{A} = (Q, A, \delta, i, T)$ déterministe complet.
Montrer que le complément de $L(\mathcal{A})$ est reconnu par $\mathcal{A}_C = (Q, A, \delta, i, Q \setminus T)$.
En déduire que RecA^* est fermé par complémentation.

<u>Exercice 5 :</u> Déterminiser les automates suivants par la méthode des sous-ensembles.

1.



2.



<u>Exercice 6 :</u> Soit $\mathcal{A}$ et $\mathcal{B}$ deux automates déterministes.
Construire un automate déterministe qui reconnaît $L(\mathcal{A}) \cup L(\mathcal{B})$.

Exercice 7 : Donner, pour chaque langage sur $A = \{a, b, c\}$ donné par les expressions rationnelles suivantes, un automate déterministe qui le reconnaisse :

1. $L_1 = (a + b)^* ca*$

2. $L_2 = (a + b + c)^*(b + c)$

Exercice 8 : Donner, pour chaque langage sur $A = \{a, b\}$ suivants, un automate déterministe qui le reconnaisse :

(a) L'ensemble des mots de longueur paire.

(b) L'ensemble des mots se terminant par a.

(c) L'ensemble des mots ayant pour préfixe aba.

(d) L'ensemble des mots ayant pour suffixe aba.

(e) L'ensemble des mots ayant pour facteur aba.

Exercice 9 : On note Σ l'alphabet $\{a, b\}$.
Soit L un langage sur cet alphabet ; on note $\Phi(L)$ le langage déduit de L en "ajoutant" une lettre a en fin de chacun de ses mots :

$$u \in \Phi(L) \Leftrightarrow \exists v \in L \text{ tel que } u = va$$

1. Existe-t-il des langages finis tels que $\Phi(L) = L$?

2. On note $L = \{a, ab, aaa\}$. Dessinez un automate fini reconnaissant L, puis un automate fini reconnaissant $\Phi(L)$.

3. On note M le langage constitué des mots contenant un nombre pair de lettres b.
Dessinez un automate fini reconnaissant $\Phi(M)$.

Exercice 10 :

1. Construire un automate reconnaissant le langage des mots m sur $A = \{a, b\}$ tels que $|m|_a$ soit un multiple de 3.

2. En déduire une expression rationnelle dénotant ce langage.

Exercice 11 : On note Σ l'alphabet $\{a, b\}$.
Montrer que les langages suivants ne sont pas rationnels :

1. $L_1 = \{u \in A^* | \ |u|_a = |u|_b\}$.

2. L_2, l'ensemble des palindromes de Σ^*.