

Chapitre 8

Logique des propositions

1 Les propositions et variables propositionnelles .

Définition 1 :

Une proposition est un énoncé de quelque nature que ce soit et qui peut être qualifié de **vrai** ou de **faux**.

Définition 2 :

Les variables propositionnelles sont des propositions qui peuvent prendre la valeur **Vrai** ou **Faux**.

Exemple 1 :

"*Les andorrans sont des européens*" est une proposition vraie ne contenant aucune variable propositionnelle.

"*L'élève x a une moyenne générale supérieure ou égale à 10*" est une variable propositionnelle qui prend la valeur **Vrai** ou **Faux** suivant l'élève x .

"*cet énoncé est faux*" n'est pas une proposition.

2 Les connecteurs logiques

On note $E = \{Vrai; Faux\}$.

Définition 3 :

Soit $n \in \mathbb{N}^*$;

On appelle connecteur logique toute application de E^n dans E .

Exemple 2 :

$\left(\begin{array}{ll} Vrai & \mapsto Vrai \\ Faux & \mapsto Vrai \end{array} \right)$ est un connecteur logique de E dans E .

Définition 4 :

Si f est un connecteur logique de E^n dans E , n est appelé l'arité de f . Elle correspond au nombre de paramètres de la fonction f .

Exercice 1 :

1. Déterminer le nombre de connecteur logique d'arité n .
2. Déterminer tous les connecteurs unitaires.

3 Exemple de connecteurs binaires

3.1 La négation

Définition 5 :

$\neg a$, à lire "non a " est une proposition qui est vraie si et seulement si a est fausse.

Table de vérité

a	$\neg a$
<i>Vrai</i>	<i>Faux</i>
<i>Faux</i>	<i>Vrai</i>

3.2 La conjonction

Définition 6 :

$a \wedge b$, à lire " a et b " est une proposition qui est vraie si et seulement si les deux propositions a et b sont vraies, sinon elle est fausse.

Table de vérité

a	b	$a \wedge b$
<i>Vrai</i>	<i>Vrai</i>	<i>Vrai</i>
<i>Vrai</i>	<i>Faux</i>	<i>Faux</i>
<i>Faux</i>	<i>Vrai</i>	<i>Faux</i>
<i>Faux</i>	<i>Faux</i>	<i>Faux</i>

3.3 La disjonction

Définition 7 :

$a \vee b$, à lire " a ou b " est une proposition qui est fausse si et seulement si les deux propositions a et b sont fausses, sinon elle est vraie. (c'est le ou inclusif)

Table de vérité

a	b	$a \vee b$
<i>Vrai</i>	<i>Vrai</i>	<i>Vrai</i>
<i>Vrai</i>	<i>Faux</i>	<i>Vrai</i>
<i>Faux</i>	<i>Vrai</i>	<i>Vrai</i>
<i>Faux</i>	<i>Faux</i>	<i>Faux</i>

3.4 L'implication

Définition 8 :

$a \rightarrow b$, à lire " a implique b " est une proposition qui est fausse si et seulement si la proposition a est vraie et b est fausse.

Table de vérité

a	b	$a \rightarrow b$
<i>Vrai</i>	<i>Vrai</i>	<i>Vrai</i>
<i>Vrai</i>	<i>Faux</i>	<i>Faux</i>
<i>Faux</i>	<i>Vrai</i>	<i>Vrai</i>
<i>Faux</i>	<i>Faux</i>	<i>Vrai</i>

3.5 L'équivalence

Définition 9 :

$a \leftrightarrow b$, à lire " a équivaux à b " est une proposition qui est vraie si et seulement si les propositions a et b sont identiques.

Table de vérité

a	b	$a \leftrightarrow b$
<i>Vrai</i>	<i>Vrai</i>	<i>Vrai</i>
<i>Vrai</i>	<i>Faux</i>	<i>Faux</i>
<i>Faux</i>	<i>Vrai</i>	<i>Faux</i>
<i>Faux</i>	<i>Faux</i>	<i>Vrai</i>

Exercice 2 : Établir la table de vérité de la disjonction exclusive : $a \oplus b$, à lire " a ou exclusif b " est une proposition vraie si a est vraie et b est fausse ou bien si a est fausse et b est vraie. Sinon elle est fausse.

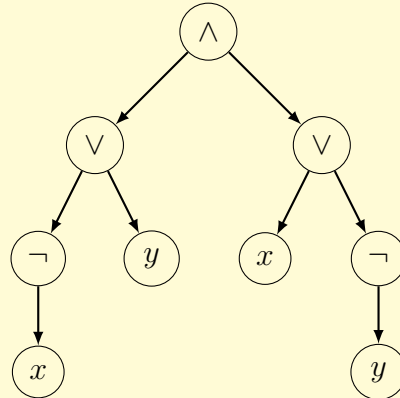
4 Forme arborescente

Chaque proposition logique peut se représenter sous la forme d'un arbre où les feuilles sont soit des constantes soit des variables propositionnelles et les nœuds ont une ou deux branches contenant un connecteur logique.



Exemple 3 :

La formule $(\neg x \vee y) \wedge (x \vee \neg y)$ se représente par l'arbre suivant :



5 Évaluation d'une formule logique

Une proposition logique est en fait une application de E^p dans E où p est le nombre de variables propositionnelles distinctes dans la proposition logique P . Elle est caractérisée par sa table de vérité qui contient $(p + 1)$ colonnes et 2^p lignes.

a_1	a_2	...	a_p	$P(a_1, a_2, \dots, a_p)$
Vrai	Vrai	...	Vrai	Vrai
Vrai	Vrai	...	Faux	Vrai
...	...	...	...	...

Réciproquement : toute fonction booléenne est une proposition logique. Pour fabriquer la proposition logique à partir d'une fonction booléenne de E^p à valeur dans E , on représente la fonction sous forme de table de vérité en notant $a_1, a_2, \dots, a_p$ les p composantes des éléments de l'ensemble de départ. On garde tous les cas où le résultat est vrai que l'on traduit sous forme conjonctive (a_1 et non(a_2) et... par exemple) que l'on relie entre elles par des ((ou)).

Exercice 3 : Considérons la fonction f de E^3 à valeurs dans E représentée par le tableau :

a_1	a_2	a_3	$f(a_1, a_2, a_3)$
Vrai	Vrai	Vrai	Faux
Vrai	Vrai	Faux	Vrai
Vrai	Faux	Vrai	Faux
Vrai	Faux	Faux	Faux
Faux	Vrai	Vrai	Vrai
Faux	Vrai	Faux	Faux
Faux	Faux	Vrai	Vrai
Faux	Faux	Faux	Faux

Donner une proposition logique correspondante.

Définition 10 :

On note $\mathcal{B} = \{0; 1\}$ l'ensemble des valeurs de vérité.

- 0 est la valeur de vérité faux.
- 1 est la valeur de vérité vrai.

On définit sur $\mathcal{A}$ l'ensemble des variables propositionnelles une application $v : \mathcal{A} \mapsto \mathcal{B}$ appelée valuation, ainsi qu'une prolongation $\bar{v}$ sur l'ensemble des formules logiques L_0 définie de façon inductive par :

- Si $a \in \mathcal{A}$, $\bar{v}(a) = v(a)$.
- Si $F \in L_0$ alors $\bar{v}(\neg F) = \varphi^\neg(\bar{v}(F))$ avec $\varphi^\neg : \begin{matrix} \mathcal{B} & \rightarrow & \mathcal{B} \\ x & \mapsto & 1 - x \end{matrix}$
- Si $F \in L_0$ et $G \in L_0$ alors $\bar{v}(F \wedge G) = \varphi^\wedge(\bar{v}(F), \bar{v}(G))$ avec $\varphi^\wedge : \begin{matrix} \mathcal{B}^2 & \rightarrow & \mathcal{B} \\ (x, y) & \mapsto & \min(x, y) \end{matrix}$
- Si $F \in L_0$ et $G \in L_0$ alors $\bar{v}(F \vee G) = \varphi^\vee(\bar{v}(F), \bar{v}(G))$ avec $\varphi^\vee : \begin{matrix} \mathcal{B}^2 & \rightarrow & \mathcal{B} \\ (x, y) & \mapsto & \max(x, y) \end{matrix}$

Propriété 1 :

- $\bar{v}(F_1 \wedge \dots \wedge F_n) = 0 \Leftrightarrow \exists i \in \llbracket 1; n \rrbracket \bar{v}(F_i) = 0.$
- $\bar{v}(F_1 \wedge \dots \wedge F_n) = 1 \Leftrightarrow \forall i \in \llbracket 1; n \rrbracket \bar{v}(F_i) = 1.$
- $\bar{v}(F_1 \vee \dots \vee F_n) = 1 \Leftrightarrow \exists i \in \llbracket 1; n \rrbracket \bar{v}(F_i) = 1.$
- $\bar{v}(F_1 \vee \dots \vee F_n) = 0 \Leftrightarrow \forall i \in \llbracket 1; n \rrbracket \bar{v}(F_i) = 0.$

6 Tautologie

Définition 11 :

On appelle tautologie toute proposition logique vraie quelles que soient les valeurs des variables propositionnelles qui la composent.

Exemple 4 :

- Idempotence : $a \wedge a \Leftrightarrow a.$
- Absorption : $a \wedge (a \vee b) \Leftrightarrow a.$
- Tiers exclu ; $a \vee \neg a.$
- Contraposition : $(a \Rightarrow b) \Leftrightarrow (\neg b \Rightarrow \neg a)$
- Exportation : $(a \Rightarrow (b \Rightarrow c)) \Leftrightarrow (a \wedge b \Rightarrow c).$
- Syllogisme : $(a \Rightarrow b) \Rightarrow ((b \Rightarrow c) \Rightarrow (a \Rightarrow c))$
- Loi de Fredge : $(x \Rightarrow (y \Rightarrow z)) \Rightarrow ((x \Rightarrow y) \Rightarrow (x \Rightarrow z))$
- Loi de Peirce : $((x \Rightarrow y) \Rightarrow x) \Rightarrow x$
- - Ex falso sequitur quodlibet : "Du faux découle ce que l'on veut" : $(x \wedge \neg x) \Rightarrow y$

7 Formules satisfiables et contradictoires

Définition 12 :

- Une formule est satisfiable s'il existe une valuation des variables propositionnelles telle que la formule soit vraie.
- Une formule est contradictoire si elle n'est pas satisfiable. (On parle alors de contradiction).

Exercice 4 :

1. Montrer que la formule $F = a \wedge (a \Rightarrow \bar{b})$ est satisfiable.
2. Montrer que la formule $F = (a \wedge b) \wedge (a \Rightarrow \bar{b})$ est contradictoire.

8 Équivalence de formules

Définition 13 :

Deux formules sont dites logiquement équivalentes si pour toute valuation des variables propositionnelles qu'elles contiennent elles sont soit toutes les deux vraies, soit toutes les deux fausses. (Notation : $F \equiv G$)

Exemple 5 :

- Loi de contraposition : $F \Rightarrow G \equiv \neg G \Rightarrow \neg F$
- Lois de De Morgan : $\neg(F \wedge G) \equiv \neg F \vee \neg G$ et $\neg(F \vee G) \equiv \neg F \wedge \neg G$
- $\neg(\neg F) \equiv F$
- $F \oplus G \equiv (F \wedge \neg G) \vee (\neg F \wedge G)$
- $F \Leftrightarrow G \equiv (F \Rightarrow G) \wedge (G \Rightarrow F)$
- $F \Rightarrow G \equiv \neg F \vee G$
- Distributivité de $\wedge$ par rapport à $\vee$: $(F \vee G) \wedge H \equiv (F \wedge H) \vee (G \wedge H)$
- Distributivité de $\vee$ par rapport à $\wedge$: $(F \wedge G) \vee H \equiv (F \vee H) \wedge (G \vee H)$

9 Complétude

Définition 14 :

On dit qu'un système de connecteurs logiques est complet si toute proposition logique peut s'exprimer comme proposition logique utilisant ces connecteurs et seulement ces connecteurs.

Exemple 6 :

$\{\neg, \wedge, \vee\}$ forme un système complet de connecteurs. (On parle aussi de base de connecteurs)

Propriété 2 :

Pour montrer qu'un système de connecteurs est complet, il faut et il suffit de prouver que les fonctions logiques $\neg a$, $a \wedge b$, et $a \vee b$ peuvent s'exprimer en utilisant que les connecteurs du système.

Exercice 5 :

1. Montrer que $\{\neg, \vee\}$ forme un système complet de connecteurs.
2. Montrer que $\{\neg, \wedge\}$ forme un système complet de connecteurs.
3. Montrer que $\{\mid\}$ forme un système complet de connecteurs. (où $(\mid)$ est le connecteur de Sheffer : $F \mid G \equiv \neg F \vee \neg G$) sont des systèmes complets.

10 Formes disjonctives et conjonctives

Définition 15 :

- On appelle **littéral** une variable propositionnelle ou bien la négation d'une variable propositionnelle. Le littéral est dit positif dans le premier cas, et négatif dans le second cas.
- On appelle **clause** toute formule de la forme $l_1 \vee \dots \vee l_q$ où $q \geq 1$ et $l_1, \dots, l_q$ sont des littéraux deux à deux distincts.
- On dit qu'une formule est sous **forme normale conjonctive** si elle est sous la forme $C_1 \wedge \dots \wedge C_m$, où $m \geq 1$ et $C_1, \dots, C_m$ sont des clauses.
- • On dit qu'une formule est sous **forme normale disjonctive** si elle est sous la forme $D_1 \vee \dots \vee D_m$, où $m \geq 1$ et $D_1, \dots, D_m$ sont des conjonctions de littéraux.

Propriété 3 :

Pour toute formule $F \in L_0$, il existe une forme normale conjonctive $F^* \in L_0$ et une forme normale disjonctive $F^+ \in L_0$ tel que $F \equiv F^*$ et $F \equiv F^+$.

Exercice 6 : On considère la formule suivante : $F = (a \Rightarrow b) \Rightarrow (\neg c \wedge b)$.

1. Donner la forme normale conjonctive équivalente à F .
2. Donner la forme normale disjonctive équivalente à F .