Chapitre 2

Graphes

1 Graphes

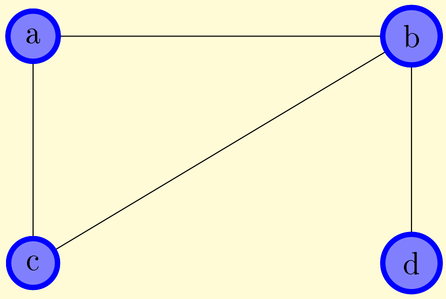
1.1 Graphes non-orientés

Définition 1 :

On note S est un ensemble fini nommé ensemble des sommets,et $\mathscr{P}_2(S)$ l'ensemble des parties à deux éléments de l'ensemble S.
Un graphe non-orienté G est un couple $G = (S, A)$ où A est une partie de $\mathscr{P}_2(S)$ appelé l'ensemble des arêtes.

Exemple 1 :

Pour $S = \{a; b; c; d\}$ et $A = \{\{a; b\}; \{a; c\} : \{b; c\}; \{b; d\}\}$, le graphe $G = (S, A)$ est représenté par :



Définition 2 :

- L'ordre d'un graphe est le nombre de sommets de ce graphe.
- Le degré d'un sommet est le nombre d'arêtes dont ce sommet est une extrémité.
- le degré d'un graphe le degré maximum de tous ses sommets.
- Un sommet de degré 0 est dit isolé. Un sommet de degré 1 est dit pendant.
- Deux sommets reliés par une arête sont adjacents.

Propriété 1 :

On considère $G = (S, A)$ un graphe non-orienté. Pour $s \in S$, on note $d(s)$ son degré et $|A|$ le cardinal de A. On a alors :

$$\sum_{s\in S} d(s) = 2|A|$$

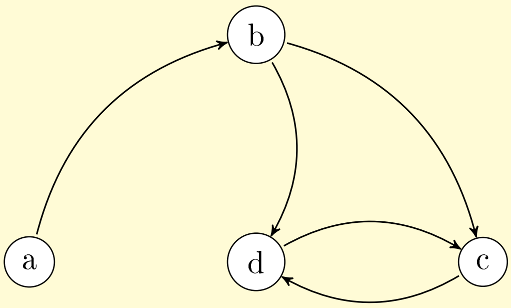
1.2 Graphes orientés

Définition 3 :

On note S est un ensemble fini nommé ensemble des sommets,et A est un sous-ensemble de S^2 nommé ensemble des arcs.
Un graphe orienté G est un couple $G = (S, A)$.

Exemple 2 :

Pour $S = \{a; b; c; d\}$ et $A = \{(a; b); (b; c) : (c, d); (d; c); (b, d)\}$, le graphe $G = (S, A)$ est représenté par :



Définition 4 :

- Pour $a = (s, s') \in A$,on dit que a relie s à s'. On note alors :

$$s \to s'$$

- On défini le degré sortant et le degré entrant d'un sommet s, noté respectivement $d^+(s)$ et $d^-(s)$, comme le nombre d'arcs de G sortant de s et entrant en s.

1.3 Graphes pondérés

Définition 5 :

Soit $G = (S, A)$ un graphe orienté ou non. En associant à chaque élément a de A une valeur numérique , on obtient un graphe pondéré.

1.4 Chemins et cycles

Définition 6 :

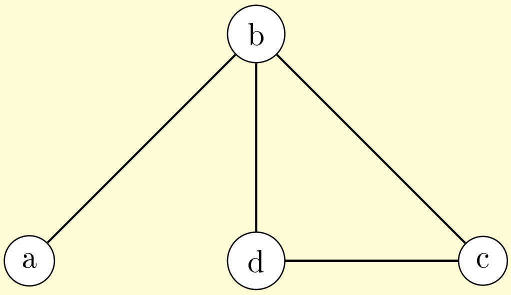
Soit $G = (S, A)$ un graphe et n un entier.

- Un *chemin* de longueur n du sommet x au sommet y est une suite finie $P = (x_0 = x; x_1; ...; x_n = y)$ de sommets de G telle que pour tout $k \in [0; n-1]$, $\{x_k, x_{k+1}\} \in A$. On dit que les sommets x et y sont reliés par le chemin P.
- Un chemin est dit *élémentaire* lorsque les arêtes qu'il définit sont deux à deux distinctes.

- Un chemin est dit *simple* lorsque les sommets x_i pour $i \in [1, n-1]$ sont deux à deux distincts et différents des sommets de départ et d'arrivée.

- On appelle distance de a à b la plus petite des longueurs des chemins reliant a à b. (si aucun chemin ne relie a à b, la distance est alors infinie.)

Exemple 3 :



La distance de a à c est 2.

Définition 7 :

- Un circuit dans un graphe est un chemin fermé de longueur non-nulle.

- Un cycle dans un graphe est un circuit élémentaire, il s'agit donc d'un chemin fermé de longueur non-nulle qui n'emprunte jamais deux fois la même arête.

- On dit d'un cycle qu'il est simple lorsque le chemin correspondant est simple.

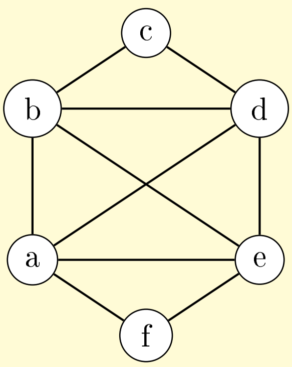
- On dit d'un chemin, d'un circuit ou d'un cycle dans un graphe qu'il est eulérien lorsqu'il emprunte une et une seule fois toutes les arêtes du graphe (un circuit eulérien est nécessairement un cycle eulérien).

- On dit d'un graphe qu'il est eulérien lorsqu'il admet un cycle eulérien.

- On dit d'un graphe qu'il est acyclique lorsqu'il n'admet aucun cycle.

Exemple 4 :

Exemple de graphe eulérien :



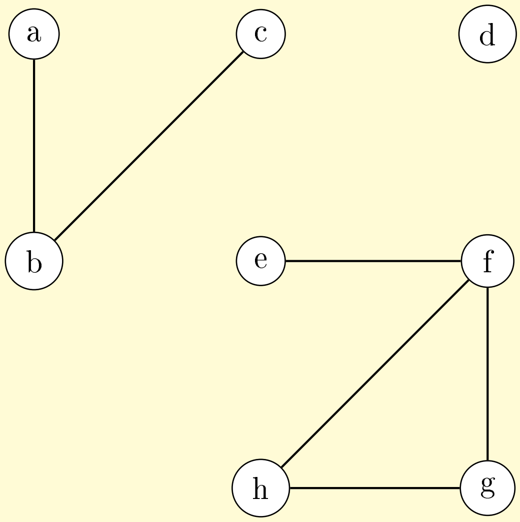
1.5 Connexité

Définition 8 :

Un graphe non orienté est dit connexe si tous ses sommets sont à distance finie les uns des autres.
Si un graphe G n'est pas connexe, une composante connexe de G est un sous-graphe connexe maximal de G .

Exemple 5 :

Le graphe G admet trois composantes connexes :



Propriété 2 :

Un graphe non orienté connexe d'ordre n possède au moins $n-1$ arêtes.

Propriété 3 :

Un graphe non orienté G sans sommet isolés, possède une chaîne eulérienne si et seulement si :

- Il est connexe.
- Il possède 0 ou 2 sommets de degré impair.

Dans le cas où il n'y a aucun sommet de degré impair, cette chaîne eulérienne est un cycle.
Dans le cas où il y en a deux, ce sont les extrémités de la chaîne.

Définition 9 :

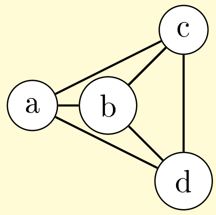
Un graphe orienté est dit fortement connexe lorsque pour tout couple de sommets (a, b) il existe un chemin reliant a à b et un chemin reliant b à a. Un graphe orienté peut être décomposé en composantes fortement connexes (des sous-graphes fortement connexes maximaux).

1.6 Graphe complet

Définition 10 :

Pour $n \geq 0$, et S un ensemble à n éléments. On appelle graphe complet le graphe de sommets A, noté K_n, dont tous les sommets sont reliés deux à deux par une arête.

Exemple 6 :



Propriété 4 :

Le nombre d'arêtes de K_n est $\dfrac{n(n-1)}{2}$.