

Chapitre 2

Dédution naturelle pour la logique propositionnelle

Correction

1 Séquents.

Définition 1 :

On suppose fixé un ensemble de formules logiques. Un séquent est une expression de la forme suivante

$$H_1, \dots, H_m \vdash C_1, \dots, C_n$$

C'est à dire (formellement) deux suites finies de formules, les hypothèses et les conclusions du séquent.

Le symbole $\vdash$ se dit traditionnellement « thèse ».

Exemple 1 :

Syllogismes en Barbara :

- $H_1 = \text{« Tous les hommes sont mortels »}$
- $H_2 = \text{« Tous les Grecs sont des hommes »}$
- $C_1 = \text{« Tous les Grecs sont mortels »}$

Propriété 1 :

La formule logique associée à un séquent s'obtient par l'implication entre la conjonction des hypothèses et la disjonction des conclusions.

Exemple 2 :

Soit p et q deux formules logiques,

$$p, p \Rightarrow q \vdash q \equiv (p \wedge (p \Rightarrow q)) \Rightarrow q$$

En l'absence d'hypothèses, on remplace le vide par $\top$.

En l'absence de conclusions, on remplace le vide par $\perp$.

$$\vdash q \equiv \top \Rightarrow q \quad , \quad p \vdash \perp \equiv p \Rightarrow \perp$$

§ Définition 2 :

Un séquent est valide si toute interprétation qui rend vraies les formules de gauche rend vraie au moins une formule à droite. Elle n'est pas valide dans le cas contraire, c'est-à-dire lorsqu'il existe une interprétation qui rend vraies toutes les formules de gauche et fausses toutes les formules de droites.

Remarque 1 : Soit un séquent sans hypothèses, c'est à dire de la forme $\vdash C$. Alors ce séquent est valide si et seulement si C est une tautologie.

Remarque 2 : Un séquent $A_1, A_2, \dots, A_n \vdash A$ valide sera noté :

$$A_1, A_2, \dots, A_n \models A$$

Exercice 1 : Pour p, q et r des formule logiques. On considère le séquent :

$$S = (p \vdash q, r), (p, r \vdash q) \vdash (p \vdash q)$$

Montrer que S est valide.

Correction

On a donc comme hypothèses que $p \Rightarrow q \vee r$ et $p \wedge r \Rightarrow q$ sont vraies et il faut montrer que l'on a alors $p \Rightarrow q$ vrai.

On peut faire une table de vérité (les cas dans lesquels l'une des deux premières formules est fausse ne nous intéressent pas).

2 Règles de déduction naturelle

§ Définition 3 :

Une règle de déduction (R) est la donnée d'une suite finie de séquents hypothèses $\Gamma_1 \vdash A_1, \dots, \Gamma_n \vdash A_n$ et d'un séquent de conclusion $\Gamma \vdash A$. On note :

$$\frac{\Gamma_1 \vdash A_1 \quad \dots \quad \Gamma_n \vdash A_n}{\Gamma \vdash A} (R)$$

Si $n = 0$, on dit que la règle est un axiome.

§ Exemple 3 :

$$\frac{A \vdash B}{\vdash A \Rightarrow B} (\text{implication})$$

§ Définition 4 :

La règle (R) est correct si $\Gamma \models A$ dès que $\Gamma_i \models A_i$ pour $i = 1, \dots, n$. Autrement dit si la déduction préserve les tautologies.

Définition 5 :

Une dérivation est un arbre dont chaque nœud est un séquent.

Chaque nœud est soit une feuille contenant un séquent, soit un nœud interne contenant un séquent et ayant une ou plusieurs dérivationes comme enfants.

On dessine une dérivation avec la racine en bas :

$$\begin{array}{c}
 \begin{array}{c} \text{feuille} \quad \dots \quad \text{feuille} \\ \hline \text{nœud interne} \end{array} \quad \begin{array}{c} \text{feuille} \quad \dots \quad \text{feuille} \\ \hline \text{nœud interne} \end{array} \quad \begin{array}{c} \text{feuille} \quad \dots \quad \text{feuille} \\ \hline \text{nœud interne} \end{array} \\
 \hline
 \text{racine}
 \end{array}$$

Propriété 2 :

- Axiome : $\frac{}{\Gamma, A \vdash A} (ax)$
- Affaiblissement : $\frac{\Gamma \vdash A}{\Gamma, B \vdash A} (aff)$
- Coupure : $\frac{\Gamma, A \vdash B \quad \Delta \vdash A}{\Gamma, \Delta \vdash B} (coupure)$
- Règles d'inférence :

Introduction	Élimination
$\frac{\Gamma \vdash A \quad \Gamma \vdash B}{\Gamma \vdash A \wedge B} (\wedge_i)$	$\frac{\Gamma \vdash A \wedge B}{\Gamma \vdash A} (\wedge_{eg}) \quad \frac{\Gamma \vdash A \wedge B}{\Gamma \vdash B} (\wedge_{ed})$
$\frac{\Gamma \vdash A}{\Gamma \vdash A \vee B} (\vee_{ig}) \quad \frac{\Gamma \vdash B}{\Gamma \vdash A \vee B} (\vee_{id})$	$\frac{\Gamma \vdash A \vee B \quad \Gamma, A \vdash C \quad \Gamma, B \vdash C}{\Gamma \vdash C} (\vee_e)$
$\frac{\Gamma, A \vdash B}{\Gamma \vdash A \Rightarrow B} (\Rightarrow_i)$	$\frac{\Gamma \vdash A \Rightarrow B \quad \Gamma \vdash A}{\Gamma \vdash B} (\Rightarrow_e)$
$\frac{\Gamma, A \vdash \perp}{\Gamma \vdash \neg A} (\neg_i)$	$\frac{\Gamma \vdash A \quad \Gamma \vdash \neg A}{\Gamma \vdash \perp} (\neg_e)$

Exemple 4 :

Dérivation de $A \Rightarrow B \Rightarrow A$:

$$\frac{\frac{\frac{}{A, B \vdash A} (Ax)}{A \vdash B \Rightarrow A} (\Rightarrow_i)}{\vdash A \Rightarrow (B \Rightarrow A)} (\Rightarrow_i)$$

Exercice 2 : Montrer, en utilisant les règles de déductions, la proposition suivante :

$$A \Rightarrow B \Rightarrow A \wedge B$$

(remarque : $A \Rightarrow B \Rightarrow C \equiv A \Rightarrow (B \Rightarrow C)$).

Correction

$$\begin{array}{c}
\frac{}{A, B \vdash A}^{(ax)} \quad \frac{}{A, B \vdash B}^{(ax)} \\
\hline
A, B \vdash A \wedge B \quad (\wedge_i) \\
\hline
A \vdash (B \Rightarrow A \wedge B) \quad (\Rightarrow_i) \\
\hline
\vdash A \Rightarrow (B \Rightarrow A \wedge B) \quad (\Rightarrow_i)
\end{array}$$

Propriété 3 :

On dispose aussi des règles alternatives lorsque la formule à éliminer est une hypothèse.

Hypothèse
$\frac{\Gamma, A, B \vdash C}{\Gamma, A \wedge B \vdash C} (\wedge_h)$
$\frac{\Gamma, A \vdash C \quad \Gamma, B \vdash C}{\Gamma, A \vee B \vdash C} (\vee_h)$
$\frac{\Gamma \vdash A, C \quad \Gamma, B \vdash C}{\Gamma, A \Rightarrow B \vdash C} (\Rightarrow_h)$
$\frac{\Gamma \vdash A, C}{\Gamma, \neg A \vdash C} (\neg_h)$

Exemple 5 :

Loi de Peirce : $((A \rightarrow B) \rightarrow A) \rightarrow A$

$$\begin{array}{c}
\frac{}{A \vdash B, A}^{(ax)} \\
\hline
\vdash (A \rightarrow B), A \quad (\rightarrow_i) \quad \frac{}{A \vdash A}^{(ax)} \\
\hline
(A \rightarrow B) \rightarrow A \vdash A \quad (\rightarrow_h) \\
\hline
\vdash ((A \rightarrow B) \rightarrow A) \rightarrow A \quad (\rightarrow_i)
\end{array}$$

Exercice 3 : Démontrer le *modus ponens* : $p, p \rightarrow q \vdash q$

Correction

$$\begin{array}{c}
\frac{}{p \vdash p, q}^{(ax)} \quad \frac{}{p, q \vdash q}^{(ax)} \\
\hline
p, p \rightarrow q \vdash q \quad (\rightarrow_h)
\end{array}$$