DS 5

Devoir sur table

(3 heures)

Le sujet comporte deux parties totalement indépendantes.

Partie I Logique et calcul des propositions (Extrait du sujet CCP 2020)

Dans la suite, les variables propositionnelles seront notées x_1, x_2.... Les connecteurs propositionnels $\wedge$ (conjonction), $\vee$ (disjonction), $\Rightarrow$ (implication) et $\Leftrightarrow$ (équivalence) seront classiquement utilisés.
De même, la négation d'une variable propositionnelle x_i (respectivement d'une formule $\mathcal{F}$) sera notée $\neg x_i$ (resp. $\neg\mathcal{F}$).

I. 1 - Définitions

Définition 1 (Minterme, maxterme)
Soit $(x_1...x_n)$ un ensemble de n variables propositionnelles.

- *On appelle minterme toute formule de la forme $y_1 \wedge y_2 \wedge ...y_n$ où pour tout $i \in \{1, ..., n\}$ y_i est un élément de $\{x_i, \neg x_i\}$.*
- *On appelle maxterme toute formule de la forme $y_1 \vee y_2 \vee ...y_n$ où pour tout $i \in \{1, ..., n\}$ y_i est un élément de $\{x_i, \neg x_i\}$.*

Les mintermes (respectivement maxtermes) $y_1 \wedge y_2 \wedge ...y_n$ et $y'_1 \wedge y'_2 \wedge ...y'_n$ (resp $y_1 \vee y_2 \vee ...y_n$et $y'_1 \vee y'_2 \vee ...y'_n$) sont considérés identiques si les ensembles $\{y_i, 1 \leqslant i \leqslant n\}$ et $\{y'_i, 1 \leqslant i \leqslant n\}$ le sont.

Q1. Donner l'ensemble des mintermes et des maxtermes sur l'ensemble (x_1, x_2).

Correction

- les mintermes : $x_1 \wedge x_2$, $x_1 \wedge \neg x_2$, $\neg x_1 \wedge x_2$, $\neg x_1 \wedge \neg x_2$.
- les maxtermes : $x_1 \vee x_2$, $x_1 \vee \neg x_2$, $\neg x_1 \vee x_2$, $\neg x_1 \vee \neg x_2$.

Définition 2 (Formes normales conjonctives et disjonctives)
Soit $\mathcal{F}$ une formule propositionnelle qui s'écrit à l'aide de n variables propositionnelles $(x_1...x_n)$.

- *On appelle forme normale conjonctive de $\mathcal{F}$ toute conjonction de maxtermes logiquement équivalente à $\mathcal{F}$.*
- *On appelle forme normale disjonctive de $\mathcal{F}$ toute disjonction de maxtermes logiquement équivalente à $\mathcal{F}$.*

Définition 3 (Système complet)
Un ensemble de connecteurs logiques $\mathcal{C}$ est un système complet si toute formule propositionnelle est équivalente à une formule n'utilisant que les connecteurs de $\mathcal{C}$.

Par définition, $\mathcal{C} = \{\neg, \wedge, \vee, \Rightarrow, \Leftrightarrow\}$ est un système complet.

I. 2 - Le connecteur de Sheffer

On définit le connecteur de Sheffer, ou d'incompatibilité, par $x_1 \diamond x_2 = \neg x_1 \vee \neg x_2$.

Q2. Construire la table de vérité du connecteur de Sheffer.

Correction

x_1	x_2	$x_1 \diamond x_2$
1	1	0
1	0	1
0	1	1
0	0	1

Q3. Exprimer ce connecteur en fonction de $\neg$ et $\wedge$.

Correction

D'après la dernière ligne de la table, on a $x_1 \diamond x_2 = \neg(x_1 \wedge x_2)$

Q4. Vérifier que $\neg x_1 = x_1 \diamond x_1$

Correction

D'après la dernière ligne de la table, on a $x_1 \diamond x_1 = \neg(x_1 \wedge x_1) = \neg x_1$

Q5. En déduire une expression des connecteurs $\wedge$, $\vee$ et $\Rightarrow$ en fonction du connecteur de Sheffer.
Justifier en utilisant des équivalences avec les formules propositionnelles classiques.

Correction

- $x_1 \wedge x_2 = \neg(x_1 \diamond x_2) = (x_1 \diamond x_2) \diamond (x_1 \diamond x_2)$.
- $x_1 \vee x_2 = (x_1 \diamond x_1) \diamond (x_2 \diamond x_2)$.
- $x_1 \Rightarrow x_2 = \neg x_1 \vee x_2 = x_1 \diamond (x_2 \diamond x_2)$

Q6. Donner une forme normale conjonctive de la formule $x_1 \diamond x_2$.

Correction

$x_1 \diamond x_2 = \neg x_1 \vee \neg x_2$, c'est déjà une forme normale conjonctive.

Q7. Donner de même une forme normale disjonctive de la formule $x_1 \diamond x_2$.

Correction

Nous pouvons récupérer la forme normale disjonctive grâce à la table de vérité : $x_1 \diamond x_2 = (x_1 \wedge \neg x_2) \vee (\neg x_1 \wedge x_2) \vee (\neg x_1 \wedge \neg x_2)$,

Q8. Démontrer par induction sur les formules propositionnelles que l'ensemble de connecteurs $\mathcal{C} = \{\diamond\}$ est un système complet.

Correction

Par induction sur les formules propositionnelles :

- Cas de base : Soit x une variable propositionnelle, évidemment, x s'exprime de façon identique dans le système $\mathcal{C}$. Il en ait de même pour les constante Vrai et Faux.
- Supposons que e ne possède que le connecteur $\diamond$, on a $\neg e = e \diamond e$, donc $\neg e$ n'utilise que le connecteur $\diamond$.
- Supposons que e_1 et e_2 deux formules n'utilisant que le connecteur $\diamond$. On a :

- $e_1 \wedge e_2 = (e_1 \diamond e_2) \diamond (e_1 \diamond e_2)$.
- $e_1 \vee e_2 = (e_1 \diamond e_1) \diamond (e_2 \diamond e_2)$.

Donc, les formules précédentes n'utilisent que le connecteur $\diamond$

On a donc bien, par induction, un système complet.

Q9. Application : soit $\mathcal{F}$ la formule propositionnelle $x_1 \vee (\neg x_2 \wedge x_3)$. Donner une forme logiquement équivalente de $\mathcal{F}$ utilisant uniquement le connecteur de Sheffer.

Correction

On a :

- $\neg x_2 = x_2 \diamond x_2$
- $\neg x_2 \wedge x_3 = ((x_2 \diamond x_2) \diamond x_3) \diamond ((x_2 \diamond x_2) \diamond x_3)$
- $x_1 \vee (\neg x_2 \wedge x_3) = (x_1 \diamond x_1) \diamond (((x_2 \diamond x_2) \diamond x_3) \diamond ((x_2 \diamond x_2) \diamond x_3))$

Partie II Tri topologique.

Sujet largement inspiré d'un sujet d'Antoine Grospellier professeur au Lycée Henri Poincaré de Nancy.

Le professeur Cosinus aide régulièrement le professeur Sinus à apprendre les gestes simples de la vie quotidienne. Aujourd'hui, la leçon porte sur l'ordre dans lequel il faut mettre ses vêtements afin de s'habiller correctement pour le bal. Voici deux exemples de règles :

- Il n'est pas possible de mettre sa cravate avant sa chemise.
- Les chaussures doivent être mises après le caleçon, le pantalon et les chaussettes.

Pour aider son ami à comprendre les différentes règles, le professeur Cosinus décide d'utiliser une représentation sous forme de graphe orienté (voir la figure 1). Dans ce graphe, chaque arc représente une contrainte : s'il existe un arc entre le sommet A et le sommet B, cela signifie que le vêtement A doit être mis avant le vêtement B. En particulier, les deux règles énoncées ci-dessus se déduisent bien du graphe de la figure 1.

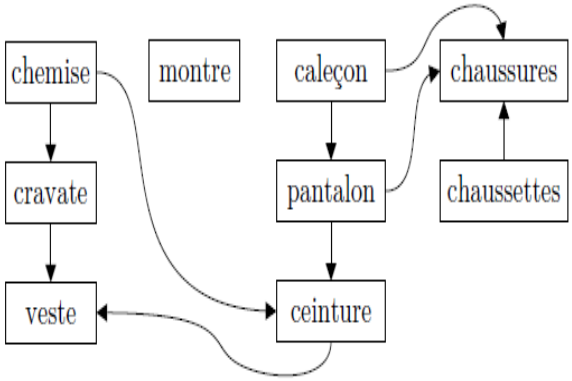


FIGURE 1

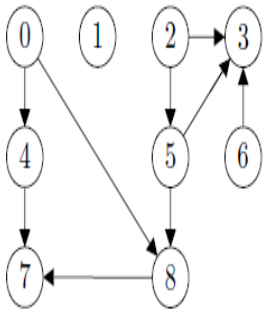


FIGURE 2

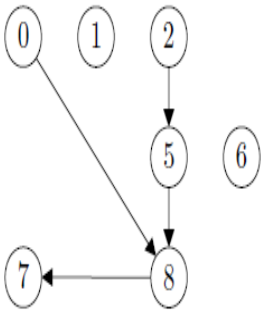


FIGURE 3

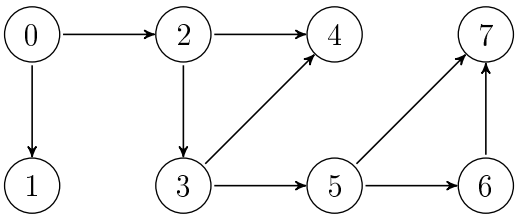
L'objectif du professeur Sinus est, à partir de la figure 1, de déterminer l'ordre dans lequel mettre ses vêtements. Voici une possibilité :
(T_1) : chaussettes, caleçon, pantalon, chaussures, montre, chemise, ceinture, cravate, veste.
Afin de formaliser le problème, on considère un graphe orienté $G = (S, A)$ dont les sommets sont numérotés de 0 à $|S| - 1$ (la figure 2 montre une numérotation possible des sommets de la figure 1).

Dans la suite, on ne fera pas de distinction entre un "sommet u" et le "numéro du sommet u". Notre but est de calculer **un tri topologique** du graphe, c'est à dire de déterminer un tableau (`tab: int array`) de taille $|S|$ contenant une et une seule fois chaque entier compris entre 0 et $|S| - 1$, et tel que si G contient l'arc (u, v) alors u apparaît strictement avant v dans `tab`. Par exemple, le tri topologique (T_1) correspond à `tab_1` :

```
let tab_1 = [|6; 2; 5; 3; 1; 0; 8; 4; 7|]
```

II. 1 - Un autre exemple

On considère le graphe `graphe_ex_2` suivant :



Représentation du `graphe_ex_2`

Q10. Justifier que le tableau suivant n'est pas un tri topologique pour le `graphe_ex_2` :

```
let tab_2 =  [| 0;2;4;1;3;5;6;7 |]
```

Correction

Dans le tableau, 4 apparait avant 3... Ce qui n'est pas permis car l'arc $(3, 4)$ est un arc du graphe.

Q11. Proposer un tri topologique pour le `graphe_ex_2` .

Correction

En reprenant le tableau `tab_2`, après correction, on peut proposer :

```
let tab_3 =  [| 0;2;3;1;4;5;6;7 |]
```

II. 2 - Représentation des graphes en OCaml

Listes de successeurs. En OCaml, un graphe orienté $G = (S, A)$ est donné par un tableau contenant les listes de successeurs des sommets. Par exemple, le graphe de la figure 2 correspond à `g_fig2` :

```
type graphe = int list array ;;
let g_fig2 = [|[4;8]; []; [3;5]; []; [7]; [3;8]; [3]; []; [7]|];;
```

Q12. Soit `(g: graphe)` un graphe avec n sommets et `(t1: int array)` un tableau de taille n contenant une et une seule fois chaque élément de $[\![0, n-1]\!]$.

Q12.(a) Écrire une fonction `inverse` qui prend en entrée `t1` et renvoie un tableau `(t2: int array)` de taille n tel que `t2.(i)` est l'indice de i dans `t1`. Par exemple :

```
inverse([|6; 2; 5; 3; 1; 0; 8; 4; 7|]);;
- : int array = [|5; 4; 1; 3; 7; 2; 0; 8; 6|]
```

Correction

```
let inverse tab =
  let n = Array.length tab in
  let t = Array.make n 0 in
  for i=0 to n-1 do
    t.(tab.(i)) <- i
  done ;
  t;;
```

Q12.(b) Écrire une fonction `est_tri_topo` qui prend en entrée `g` et `t_1`, et renvoie un booléen qui indique si `t_1` est un tri topologique de `g`. Le temps d'exécution devra être en $O(n+m)$ où n et m sont les nombres de sommets et d'arcs. (On pourra écrire une fonction auxiliaire pour gérer la relation d'ordre d'un sommet et la liste de ces successeurs.)

Correction

```
let rec aux tab i liste_i = match liste_i with
    | [] -> true
    | j :: reste -> (tab.(i) < tab.(j)) && aux tab i reste;;

let est_tri_topo (g: graphe ) tab =
  let n = Array.length tab in
  let tab_2 = inverse tab in
  let i = ref 0 in
  while !i < n && aux tab_2 !i g.(!i) do
    incr i
  done;
  !i = n;;
```

Q12.(c) Justifier la complexité de la fonction `est_tri_topo`.

Correction

La fonction auxiliaire s'exécute en temps $O(d)$ où d est le nombre d'éléments dans la liste donnée comme 3ème argument.
La fonction `inverse` s'exécute en temps $O(n)$.
La fonction `est_tri_topo` effectue au plus n tours de boucle et appelle la fonction auxiliaire une fois sur chaque liste de successeurs. Si on note d_i le nombre d'éléments dans la liste de successeurs du sommet numéro i (d_i est donc le degré sortant du sommet), alors $\sum_{i=0}^{n-1} d_i = m$ (car chaque arc ajoute une unité au degré sortant de l'un des sommets). Finalement, le temps d'exécution en ne comptant que les appels à la fonction auxiliaire est donc $O(m)$.
Au total, on a une complexité en $O(n)+O(m)$, c'est à dire en $O(n+m)$.

Sous-graphes induits. On dit que G est un sous-graphe induit de G_0 si G peut être obtenu en supprimant certains sommets dans G_0.
Formellement, $G=(S,A)$ est un sous-graphe induit de $G_0=(S_0,A_0)$ si et seulement si :

$$S \subset S_0 \qquad \text{et} \qquad A = \{(u,v) \in A_0 : u \in S, v \in S\}$$

Par exemple, le graphe de la figure 3 est un sous-graphe induit de la figure 2, il est obtenu en supprimant les sommets numérotés 3 et 4.

En OCaml, un sous-graphe induit G est représenté par une variable `(g: graphe_induit)` telle que `g.g0` correspond au graphe initial G_0 et `g.s.(i)` vaut true si et seulement le sommet numéro i est un sommet de G. Par exemple, pour le graphe de la figure 3, on obtient `g_fig3` :

```
type graphe_induit = {g0: graphe ;s : bool array};;

let g_fig3 = { g0 = g_fig2 ;
s = [| true ; true ; true ; false ; false ; true ; true ; true ; true |]} ;;
```

Q13. Écrire une fonction `suppr_sommmets: graphe_induit -> int list -> unit` qui prend en entrée un graphe G ainsi qu'une liste l_i, et supprime de G tous les sommets appartenant à l_i. On pourra supposer sans le vérifier que l_i ne contient que des sommets de G.

Correction

```
let rec suppr_sommets g liste_i =
  match liste_i with
    | [] -> ()
    | i::reste -> g.s.(i) <- false ; suppr_sommets g reste
  ;;
```

Q14.

Q14.(a) Écrire une fonction `deg_entrant` qui prend en entrée un graphe `(g: graphe_induit)` avec n sommets et renvoie un tableau `(deg: int array)` de taille n tels que `deg.(i)` est le degré entrant du sommet i dans G. Si i n'est pas un sommet de G, `deg.(i)` est fixé à -1.

Correction

```
let deg_rentrant g =
    let n = Array.length g.g0 in
    let deg = Array.make n 0 in
    let rec aux liste = match liste with
      | [] -> ()
      | i::reste when g.s.(i) ->  deg.(i) <- deg.(i) +1; aux reste
      | i::reste ->deg.(i) <- -1 ; aux reste
    in
    for i= 0 to n-1 do
      if g.s.(i) then aux g.g0.(i) else deg.(i) <- -1
    done;
    deg;;
```

Q14.(b) Quelle est la complexité de votre fonction ? Justifier. Correction

On a encore une complexité en $O(n+m)$.

II. 3 - Calcul d'un tri topologique

Pour rappel, un **circuit** est un chemin de longueur strictement positive, dont les arcs sont distincts deux à deux et dont les sommets de départ et d'arrivée sont identiques.

Q15. Montrer que s'il existe un circuit dans un graphe G alors il n'existe pas de tri topologique pour G.

Correction

Supposons l'existence d'un tri topologique pour G, contenant le circuit $u = u_0; u_1; ...; u_k = u$. Dans le tri topologique, $u = u_0$ sera donc placé avant u_1, lui même placé avant u_2..., en finissant placé avant $u_k = u$... D'où l'absurdité...

Dans la suite de cette partie, tous les graphes considérés ne contiennent pas de circuit.

II. 3-1 - Première méthode

Le professeur Sinus propose une solution pour obtenir un tri topologique à partir du graphe de la figure 1. Il remarque tout d'abord que les sommets étiquetés par "caleçon", "chaussettes", "montre" et "chemise" ont tous les quatre un degré entrant égal à 0. On peut donc les placer

au début du tri topologique (dans un ordre arbitraire). En supprimant ces quatre sommets du graphe, les sommets "pantalon" et "cravate" ont pour degré entrant 0 et peuvent donc être placés à la suite dans le tri topologique. On continue ainsi jusqu'à ce que tous les sommets aient été supprimés du graphe. Avec cette procédure on obtient :

(T2) : caleçon, chaussettes, montre, chemise, pantalon, cravate, chaussures, ceinture, veste.

Q16. Appliquer l'algorithme précédent sur le graphe `graphe_ex_2` pour déterminer un tri topologique.

Correction

On trouve le tableau : $[|0\,;\,1\,;\,2\,;\,3\,;\,4\,;\,5\,;\,6\,;\,7|]$

Q17.

Q17.(a) En généralisant cette idée, écrire une fonction `(tri_topo1: graphe -> int array)` qui renvoie un tri topologique du graphe donné en entrée. On attend ici que vous utilisiez le type `graphe_induit` de la partie 1.

Correction

```
let tri_topo1 g =
      let n =Array.length g in
      let g_1 = { g0 = g ; s = Array.make n true } in
      let compteur = ref 0 in
      let liste_sommet = ref [] in
      let tri = Array.make n 0 in
      while !compteur < n do
        let deg = deg_rentrant g_1 in
        for i = 0 to n-1 do
          if deg.(i) = 0 then
            begin
              tri.(!compteur) <- i ;
              liste_sommet := i::(!liste_sommet) ;
              incr compteur ;
            end
        done ;
        suppr_sommets g_1 (!liste_sommet);
        liste_sommet := [];
      done ;
      tri ;;
```

Q17.(b) Justifier qu'à chaque étape de la fonction `tri_topo1`, il existe au moins un sommet dont le degré entrant est 0. On rappelle qu'on a supposé que le graphe ne contient pas de circuit.

Correction

Tant qu'il reste des sommets, supposons qu'il n'y a aucun sommet de degré entrant nul. Pour u_0 un sommet existant, il possède au moins un arc entrant, notons u_1 l'autre extrémité. On réitère avec u_1... or le nombre de sommet étant fini, cette suite admet forcément des éléments égaux, donc un circuit... Ce qui est absurde.

Q17.(c) Quelle est la complexité de votre fonction ? Correction

La boucle `while` s'exécute au plus n fois. Il y a dans cette boucle, une boucle `for` (en $O(n)$), le fonction `suppr_sommets` qui est aussi dans le pire des cas en $O(n)$, et la fonction `deg_entrant` qui est en $O(n+m)$. La fonction a donc une complexité en $O(n(n+m))$.

II. 3-2 - Deuxième méthode

Le professeur Cosinus pense que la solution de la partie 2.1 n'est pas optimale en terme de complexité. Il pense pouvoir utiliser un parcours en profondeur pour calculer le tri topologique. Voici pour commencer un pseudo-code décrivant le parcours en profondeur à partir d'un sommet s :

Algorithme 1 : – PP(s) – Parcours en profondeur à partir du sommet s

♯ Début de traitement du sommet s
pour chaque sommet t voisin de s **faire**
  si t a déjà été rencontré lors d'un parcours précédent **alors**
    ne rien faire
  sinon
    appeler récursivement PP(t)
  fin si
fin pour
♯ Fin de traitement du sommet s

Étant donné qu'un appel à la procédure `PP` n'atteint pas forcément tous les sommets du graphe, il est parfois nécessaire d'effectuer plusieurs parcours en profondeur. La procédure principale que nous utiliserons est la suivante :

Algorithme 2 : Procédure principale

pour chaque sommet s du graphe **faire**
  si s a déjà été rencontré lors d'un parcours précédent **alors**
    ne rien faire
  sinon
    appeler PP(s)
  fin si
fin pour

Appliquons l'algorithme 2 avec le graphe $G = (S, A)$ de la figure 2. Voici les différents évènements qui se produisent : début de traitement du sommet 0, début de traitement du sommet 4, début de traitement du sommet 7, fin de traitement du sommet 7, fin de traitement du sommet 4, début de traitement du sommet 8, fin de traitement du sommet 8, fin de traitement du sommet 0. La procédure principale effectue ensuite d'autres appels à la fonction PP, par exemple à partir du sommet 1, puis à partir du sommet 2 et enfin à partir du sommet 3. Ces évènements peuvent maintenant être numérotés de 1 à 2 $|S|$ en suivant l'ordre dans lequel ils se produisent. On obtient :

Sommet s	0	1	2	3	4	5	6	7	8
deb(s)	1	9	11	12	2	14	17	3	6
fin(s)	8	10	16	13	5	15	18	4	7

où deb(s) et fin(s) sont les instants de début et de fin de traitement du sommet s. On appelle **ordre préfixe** (resp. **ordre postfixe**) la liste des sommets triés par ordre croissant de début (resp. fin) de traitement. On obtient :

Ordre préfixe : (0,4,7,8,1,2,3,5,6) , Ordre postfixe : (7,4,8,0,1,3,5,2,6).

Q18. Appliquer l'algorithme au graphe `graphe_ex_2` en choisissant les voisins dans l'ordre croissant. On donnera les deux ordres définis précédemment.

Correction

Sommet s	0	1	2	3	4	5	6	7
deb(s)	1	2	4	5	6	8	9	10
fin(s)	16	3	15	14	7	13	12	11

L'ordre préfixe est donc : $(0, 1, 2, 3, 4, 5, 6, 7)$
L'ordre postfixe est donc : $(1, 4, 6, 7, 5, 3, 2, 0)$

Q19. Supposons avoir exécuté l'algorithme 2 sur un graphe $G = (S, A)$ ne contenant pas de circuit.

Q19.(a) Montrer qu'il n'existe pas d'arc $(u, v) \in A$ tel que $\text{deb}(v) < \text{deb}(u)$ et $\text{fin}(v) > \text{fin}(u)$.

Correction

Par l'absurde, supposons qu'il existe un arc (u, v) tel que $\text{deb}(v) < \text{deb}(u)$ et $\text{fin}(v) > \text{fin}(u)$.
L'appel à PP(v) se décompose en trois étapes :

(i) Début de traitement du sommet v. En d'autres termes, on fixe la valeur de deb(v).

(ii) On effectue les appels récursifs.

(iii) Fin de traitement du sommet v. En d'autres termes, on fixe la valeur de fin(v).

L'appel à PP(u) a pu se produire à trois moments différents :

- Avant l'étape (i), mais dans ce cas on aurait $\text{deb}(u) < \text{deb}(v)$ ce qui contredit notre hypothèse.
- Après l'étape (iii), mais dans ce cas on aurait $\text{fin}(u) > \text{fin}(v)$ ce qui contredit notre hypothèse.
- Pendant l'étape (ii).

Ainsi, la seule possibilité est que l'appel à PP(u) se soit produit pendant l'étape (ii). Lors des appels récursifs, la fonction PP n'emprunte que des arcs du graphe pour se déplacer entre les sommets. Il existe donc un chemin entre v et u dans G. Ce chemin peut être complété en un circuit en utilisant l'arc (u, v), ce qui constitue une contradiction.

Q19.(b) Montrer que l'ordre postfixe lu à l'envers est un tri topologique.

Correction

Montrons que l'ordre postfixe lu à l'envers est un tri topologique
On doit montrer que pour tout arc (u, v) dans le graphe, u apparaît après v dans l'ordre postfixe, c'est à dire que $\text{fin}(u) > \text{fin}(v)$.
Pour le montrer, on distingue 2 cas :

- Si $\text{deb}(v) < \text{deb}(u)$ alors d'après la question précédente, on a $\text{fin}(v) < \text{fin}(u)$.
- Si $\text{deb}(v) > \text{deb}(u)$ alors au début de l'appel à PP(u), le sommet v n'a pas encore été exploré. Puisqu'il existe un arc entre u et v, on en déduit que PP(v) est l'un des appels récursifs de PP(u). On a donc $\text{fin}(v) < \text{fin}(u)$.

Q19.(c) En déduire par cette méthode un tri topologique du graphe `graphe_ex_2`.

Correction

On trouve : $[|0, 2, 3, 5, 7, 6, 4, 1|]$.

Q20.

Q20.(a) Écrire une fonction `(tri_topo2: graphe -> int array)` qui renvoie le tri topologique obtenu avec la méthode donnée ci-dessus.

Correction

```
let tri_topo2 g =
 let n =Array.length g in
 let deja_vu = Array.make n false in
 let result = ref [] in
 let rec pp u =
   if deja_vu.(u) then ()
   else
   begin

     let rec lecture_voisin liste = match liste with
       | [] ->()
       | s::reste when deja_vu.(s) -> lecture_voisin reste
       | s::reste -> begin

                     pp s ;
                     lecture_voisin reste ;
                   end
     in
     lecture_voisin g.(u) ;

   result := u:: (!result);
   deja_vu.(u) <- true ;
   end ;
   in
 for u = 0 to n-1 do
     pp u ;

 done ;
 !result ;;
```

Q20.(b) Quelle est la complexité de votre fonction ?

Correction

La fonction `lecture_voisin` a une complexité liée au nombre d'arête. De plus tous les sommets sont parcourus dans la fonction `pp`.
On obtient une complexité en $O(n + m)$.

FIN