DS 2

Devoir sur table

Exercice 1 :

On considère la règle de déduction par l'absurde suivante

$$\dfrac{\Gamma, \neg A \vdash \bot}{\Gamma \vdash A}(raa)$$

Où Γ est un ensemble de formules.

(En latin, le raisonnement se dit reduction ad absurdum, d'où l'acronyme raa)

Montrer la correction de la règle.

(On rappelle que, pour montrer la correction d'une règle, il faut montrer que le séquent obtenu par déduction de la règle est valide dès que les séquents en hypothèses le sont.)

Correction

On suppose que $\Gamma, \neg A \vdash \bot$ est valide et on veut montrer que $\Gamma \vdash A$ l'est.

Considérons une interprétation I qui rend vraie l'ensemble l'ensemble des formules de Γ.

- Si cette interprétation rend A faux, alors le séquent $\Gamma, \neg A \vdash \bot$ ne peut être valide. Ce qui ne correspond pas à la règle.
- Cette interprétation rend donc A vraie, donc le séquent $\Gamma \vdash A$ est valide.

Exercice 2 :

Déterminer la dérivation de :

$$A \Rightarrow B \vdash \neg B \Rightarrow \neg A$$

Correction

$$\dfrac{\dfrac{\dfrac{\dfrac{}{A, \neg B \vdash A}(ax)}{\neg B \vdash A, \neg A}\neg_i \qquad \dfrac{\dfrac{}{B \vdash \neg A, B}(ax)}{\neg B, B \vdash \neg A}\neg_h}{A \Rightarrow B, \neg B \vdash \neg A}\Rightarrow_h}{A \Rightarrow B \vdash \neg B \Rightarrow \neg A}\Rightarrow_i$$

Proposition d'une autre rédaction (sans l'utilisation des règles d'hypothèses) :

$$\dfrac{\dfrac{\dfrac{\dfrac{}{A \Rightarrow B, \neg B, A \vdash A \Rightarrow B}(ax) \qquad \dfrac{}{A \Rightarrow B, \neg B, A \vdash A}(ax)}{A \Rightarrow B, \neg B, A \vdash B}\Rightarrow_e \qquad \dfrac{}{A \Rightarrow B, \neg B, A \vdash \neg B}(ax)}{\dfrac{A \Rightarrow B, \neg B, A \vdash \bot}{A \Rightarrow B, \neg B \vdash \neg A}\neg_i}\neg_e}{A \Rightarrow B \vdash \neg B \Rightarrow \neg A}\Rightarrow_i$$

Exercice 3 :

En utilisant les règles de déduction naturelle, montrer la formule de transitivité :

$$((A \Rightarrow B) \wedge (B \Rightarrow C)) \Rightarrow (A \Rightarrow C)$$

Correction

$$
\begin{prooftree}
\AxiomC{}
\RightLabel{(ax)}
\UnaryInfC{$A, (B \Rightarrow C) \vdash A, C$}
\RightLabel{$\Rightarrow_i$}
\UnaryInfC{$B \Rightarrow C \vdash A, A \Rightarrow C$}
\AxiomC{}
\RightLabel{(ax)}
\UnaryInfC{$B \vdash B, A \Rightarrow C$}
\AxiomC{}
\RightLabel{(ax)}
\UnaryInfC{$A, B, C \vdash C$}
\RightLabel{$\Rightarrow_i$}
\UnaryInfC{$B, C \vdash A \Rightarrow C$}
\RightLabel{$\Rightarrow_h$}
\BinaryInfC{$B, B \Rightarrow C \vdash A \Rightarrow C$}
\RightLabel{$\Rightarrow_h$}
\BinaryInfC{$A \Rightarrow B, B \Rightarrow C \vdash A \Rightarrow C$}
\RightLabel{$\wedge_h$}
\UnaryInfC{$(A \Rightarrow B) \wedge (B \Rightarrow C) \vdash A \Rightarrow C$}
\RightLabel{$\Rightarrow_i$}
\UnaryInfC{$\vdash (A \Rightarrow B) \wedge (B \Rightarrow C) \Rightarrow A \Rightarrow C$}
\end{prooftree}
$$

Exercice 4 :

Montrer, en utilisant les règles de déduction naturelle, que le séquent suivant n'est pas valide :

$$p \wedge q, r \Rightarrow s \vdash (p \vee r) \Rightarrow (q \wedge s)$$

Correction

$$
\begin{prooftree}
\AxiomC{}
\RightLabel{(ax)}
\UnaryInfC{$p, q, r \Rightarrow s, p \vee r \vdash q$}
\AxiomC{$p, q \vdash r, s$}
\AxiomC{}
\RightLabel{(ax)}
\UnaryInfC{$p, q, r \vdash r, s$}
\RightLabel{$\vee_h$}
\BinaryInfC{$p, q, p \vee r \vdash r, s$}
\AxiomC{}
\RightLabel{(ax)}
\UnaryInfC{$p, q, s, p \vee r \vdash s$}
\RightLabel{$\Rightarrow_h$}
\BinaryInfC{$p, q, r \Rightarrow s, p \vee r \vdash s$}
\RightLabel{$\wedge_i$}
\BinaryInfC{$p, q, r \Rightarrow s, p \vee r \vdash (q \wedge s)$}
\RightLabel{$\Rightarrow_i$}
\UnaryInfC{$p, q, r \Rightarrow s \vdash (p \vee r) \Rightarrow (q \wedge s)$}
\RightLabel{$\wedge_h$}
\UnaryInfC{$p \wedge q, r \Rightarrow s \vdash (p \vee r) \Rightarrow (q \wedge s)$}
\end{prooftree}
$$

On obtient une feuille qui permet d'obtenir une interprétation permettant de rendre le séquent non valide, en effet pour le séquent $p, q \vdash r, s$, il suffit de prendre p et q vraies et r et s faux, on obtient des hypothèses vraies et les conclusions fausses.
En reprenant le séquent initial, avec cette interprétation, on a bien pour les hypothèses :

- $p \wedge q$ est vraie.
- $r \Rightarrow s$ est vraie

Pour la conclusion :

- $p \vee r$ vraie
- $q \wedge s$ est faux

Ce qui donne bien $(p \vee r) \Rightarrow (q \wedge s)$ faux.

Exercice 5 :

Un étudiant fait le raisonnement suivant :

Hypothèses :

- Si une fonction est continue , alors si sa dérivée existe , la fonction est dérivable.
- On sait que la fonction est effectivement continue.
- Cependant, on constate que la fonction n'est pas dérivable.

Conclusion :

On affirmer que la dérivée n'existe pas.

1. Formaliser ce raisonnement par un séquent en utilisant les variables suivantes :
p : "la fonction est continue", q : "la dérivée existe" et r : "la fonction est dérivable" .

2. Montrer que le raisonnement ci-dessus est correct :

- en utilisant la table de vérité ;
- en utilisant la dérivation du séquent.

Correction

On obtient le séquent suivant :

$$(p \to (q \to r)), p, \neg r \vdash \neg q$$

On peut limiter la table de vérité aux lignes pour lesquels la formule p est vraie :

p	q	r	$q \to r$	$p \to (q \to r)$	$\neg r$	$\neg q$	
1	0	0	0	1	1	1	1
1	0	1	1	1	1	0	-
1	1	0	0	0	-	-	-
1	1	1	1	1	1	0	-

On constate bien que la ligne pour laquelle toutes les hypothèses sont vraies correspondent à une conclusion vraie.
Ce qui permet de valider le séquent, et donc le raisonnement.

Par dérivation :

$$\dfrac{\dfrac{}{p, \neg r \vdash p, \neg r}(ax) \qquad \dfrac{\dfrac{\dfrac{}{q, \neg r, q \vdash q}(ax)}{p, \neg r \vdash q, \neg q}\neg_{id} \qquad \dfrac{\dfrac{}{r, p \vdash \neg q, r}(ax)}{r, p, \neg r \vdash \neg q}\neg_h}{q \to r, p, \neg r \vdash \neg q}\to_h}{p \to (q \to r)), p, \neg r \vdash \neg q}\to_h$$