

Sujet BTS**A. Résolution d'une équation différentielle**

On considère l'équation différentielle

$$(E) : y'' + 2y' + y = 2e^{-x},$$

où y est une fonction inconnue de la variable réelle x , définie et deux fois dérivable sur $\mathbb{R}$, y' la fonction dérivée de y et y'' sa fonction dérivée seconde.

1. (a) Résoudre dans $\mathbb{R}$ l'équation $r^2 + 2r + 1 = 0$.

.....
.....
.....
.....
.....
.....
.....

- (b) En déduire les solutions définies sur $\mathbb{R}$ de l'équation différentielle

$$(E_0) : y'' + 2y' + y = 0.$$

.....
.....

2. On considère la fonction h définie sur $\mathbb{R}$ par $h(x) = x^2 e^{-x}$

- (a) Déterminer la dérivée h' sur $\mathbb{R}$:

.....
.....
.....
.....
.....

- (b) Déterminer la dérivée seconde h'' sur $\mathbb{R}$:

.....
.....
.....
.....
.....

- (c) En déduire que h est une solution particulière de (E)

.....
.....
.....
.....
.....

3. Parmi les fonctions suivantes, quelles sont les solutions de (E) :

(a) $f_1(x) = x^2 e^{-x}$

.....

(b) $f_2(x) = x^2 e^{-2x}$

.....

(c) $f_3(x) = (3x + 1)e^{-x}$

.....

(d) $f_4(x) = (x + 1)^2 e^{-x}$

.....

(e) $f_5(x) = (x^2 + 2x - 4)e^{-x}$

.....

(f) $f_6(x) = (x^2 + 2x - 4)e^{-x}$

.....

4. Justifier que la fonction $f(x) = (x^2 - 1)e^{-x}$ est la solution de l'équation différentielle (E) qui vérifie les conditions initiales $f(0) = -1$ et $f'(0) = 1$.

.....
.....
.....
.....
.....
.....