TD 2

Équations différentielles du premier ordre
Correction

Exercice 1 : Résoudre les équations suivantes :

(a) $3y' - 5y = 0$

Solution :

$S_H = \left\{Ce^{\frac{5}{3}t} / C \in \mathbb{R}\right\}$

(b) $y' - \frac{1}{2}y = 0$

Solution :

$S_H = \left\{Ce^{\frac{1}{2}t} / C \in \mathbb{R}\right\}$

(c) $3y' = 4y$

Solution :

$3y' = 4y \Leftrightarrow 3y' - 4y = 0.$
$S_H = \left\{Ce^{\frac{4}{3}t} / C \in \mathbb{R}\right\}$

(d) $2y' = -6y$

Solution :

$2y' = -6y \Leftrightarrow 2y' + 6y = 0.$
$S_H = \{Ce^{-3t} / C \in \mathbb{R}\}$

Exercice 2 : On considère l'équation (E) suivante :

$$(E) \quad y' - 2y = -2x^2 + 1$$

1. Résoudre l'équation homogène :

$$(E_H) \quad y' - 2y = 0$$

Solution :

$S_H = \{Ce^{2x} / C \in \mathbb{R}\}$

2. Montrer que la fonction f_0 définie sur $\mathbb{R}$ par $f_0(x) = x^2 + x$ est une solution particulière de (E).

Solution :

$f_0(x) = x^2 + x$
On a $f_0'(x) = 2x + 1$, donc :

$$\begin{array}{rcl} f_0'(x) - 2f_0(x) & = & 2x + 1 - 2(x^2 + x) \\ & = & 2x + 1 - 2x^2 - 2x \\ & = & -2x^2 + 1 \end{array}$$

La fonction f_0 est donc bien une solution particulière de l'équation différentielle.

3. En déduire l'ensemble solution de (E).

Solution :

Les solutions de l'équation non homogène s'obtiennent en ajoutant à une solution particulière les solutions générales de l'équation homogène :

$$S = \left\{Ce^{2x} + x^2 + x / C \in \mathbb{R}\right\}$$

Exercice 3 : On considère l'équation (E) suivante :

$$(E) \quad y' + 3y = 5e^{2x}$$

1. Résoudre l'équation homogène :

$$(E_H) \quad y' + 3y = 0$$

Solution :

$S_H = \{Ce^{-3x} / C \in \mathbb{R}\}$

2. Montrer que la fonction f_0 définie sur $\mathbb{R}$ par $f_0(x) = e^{2x}$ est une solution particulière de (E).

Solution :

$f_0(x) = e^{2x}$

On a $f_0'(x) = 2e^{2x}$, donc :

$$\begin{aligned} f_0'(x) + 3f_0(x) &= 2 \quad e^{2x} + 3e^{2x} \\ &= \quad 5e^{2x} \end{aligned}$$

La fonction f_0 est donc bien une solution particulière de l'équation différentielle.

3. En déduire l'ensemble solution de (E).

Solution :

Les solutions de l'équation non homogène s'obtiennent en ajoutant à une solution particulière les solutions générales de l'équation homogène :

$$S = \left\{Ce^{-3x} + e^{2x} / C \in \mathbb{R}\right\}$$

4. Déterminer la solution g de E vérifiant la condition initiale $g(0) = 7$.

Solution :

On cherche C tel que $g(0) = 7$:

$$\begin{aligned} g(0) &= 7 \\ \Rightarrow \quad Ce^{-3\times 0} + e^{2\times 0} &= 7 \\ \Rightarrow \quad C + 1 &= 7 \\ \Rightarrow \quad C &= 6 \end{aligned}$$

La fonction g est donc : $g(x) = 6e^{-3x} + e^{2x}$.

Exercice 4 : On considère l'équation (E) suivante :

$$(E) \quad 2y' - y = x + e^x$$

1. Résoudre l'équation homogène :$(E_H) \quad 2y' - y = 0$

Solution :

$S_H = \left\{ Ce^{\frac{1}{2}x} / C \in \mathbb{R} \right\}$

2. Montrer que la fonction f_0 définie sur $\mathbb{R}$ par $f_0(x) = e^x - x - 2$ est une solution particulière de (E).

Solution :

$f_0(x) = e^x - x - 2$
On a $f_0'(x) = e^x - 1$, donc :

$$\begin{aligned} 2f_0'(x) - f_0(x) &= 2(e^x - 1) - (e^x - x - 2) \\ &= 2e^x - 2 - e^x + x + 2 \\ &= x + e^x \end{aligned}$$

La fonction f_0 est donc bien une solution particulière de l'équation différentielle.

3. En déduire l'ensemble solution de (E).

Solution :

Les solutions de l'équation non homogène s'obtiennent en ajoutant à une solution particulière les solutions générales de l'équation homogène :

$$S = \left\{ Ce^{\frac{1}{2}x} + e^x - x - 2 / C \in \mathbb{R} \right\}$$

4. Déterminer la solution g de E vérifiant la condition initiale $g(0) = 1$.

Solution :

On cherche C tel que $g(0) = 1$:

$$\begin{aligned} g(0) &= 1 \\ \Rightarrow \quad Ce^{\frac{1}{2}\times 0} + e^0 - 0 - 2 &= 1 \\ \Rightarrow \quad C + 1 - 2 &= 1 \\ \Rightarrow \quad C &= 2 \end{aligned}$$

La fonction g est donc : $g(x) = 2e^{\frac{1}{2}x} + e^x - x - 2$.

Exercice 5 : On considère l'équation (E) suivante :

$$(E) \quad y' + y = 3x + 1$$

1. Déterminer les coefficients a et b pour que la fonction définie par $f(x) = ax + b$ soit une solution de (E).

Solution :

$f(x) = ax + b$

On a $f'(x) = a$, donc :

$$\begin{aligned} f'(x) + f(x) = 3x + 1 &\Leftrightarrow a + ax + b = 3x + 1 \\ &\Leftrightarrow \begin{cases} a &= 3 \\ a + b &= 1 \end{cases} \\ &\Leftrightarrow \begin{cases} a &= 3 \\ 3 + b &= 1 \end{cases} \\ &\Leftrightarrow \begin{cases} a &= 3 \\ b &= -2 \end{cases} \end{aligned}$$

La fonction $f(x) = 3x - 2$ est donc bien une solution particulière cherchée.

2. Résoudre l'équation homogène :$(E_H) \quad y' + y = 0$

Solution :

$S_H = \{Ce^{-x} / C \in \mathbb{R}\}$

3. En déduire l'ensemble solution de (E).

Solution :

Les solutions de l'équation non homogène s'obtiennent en ajoutant à une solution particulière les solutions générales de l'équation homogène :

$$S = \left\{Ce^{-x} + 3x - 2 / C \in \mathbb{R}\right\}$$

4. Déterminer la solution g de E vérifiant la condition initiale $g(0) = 5$.

Solution :

On cherche C tel que $g(0) = 5$:

$$\begin{aligned} g(0) &= 5 \\ \Rightarrow \quad Ce^{-0} + 3 \times 0 - 2 &= 5 \\ \Rightarrow \quad C - 2 &= 5 \\ \Rightarrow \quad C &= 4 \end{aligned}$$

La fonction g est donc : $g(x) = 7e^{-x} + 3x - 2$.

Exercice 6 : On considère l'équation (E) suivante :

$$(E) \quad y' + 2y = 3te^t$$

1. En utilisant le logiciel Xcas, on obtient la capture d'écran suivante :

```
2 f(x) := (x-1/3)*exp(x)
// Interprète f
// Succès
// lors de la compilation f
x ->(x-1/3)*exp(x)
3 factoriser(f'(x))
(3*x+2)*exp(x)/3
4 simplifier(f'(x) +2*f(x))
3*x*exp(x)
```

Justifier les lignes 3 et 4.

Solution :

On pose $f(x) = \left(x - \frac{1}{3}\right) e^x$.

Pour la ligne 3, il s'agit de la dérivée d'un produit :

$$\begin{aligned} f'(x) &= 1 \times e^x + \left(x - \frac{1}{3}\right) e^x \\ &= \left(1 + x - \frac{1}{3}\right) e^x \\ &= \left(\frac{3x+2}{3}\right) e^x \end{aligned} \quad .$$

Pour la ligne 4 :

$$\begin{aligned} f'(x) + 2f(x) &= \left(\frac{3x+2}{3}\right) e^x + 2\left(x - \frac{1}{3}\right) e^x \\ &= \left(\frac{3x+2}{3} + 2x - \frac{2}{3}\right) e^x \\ &= (x + 2x)\, e^x \\ &= 3xe^x \end{aligned} \quad .$$

2. Résoudre l'équation homogène :$(E_H) \quad y' + 2y = 0$

Solution :

$S_H = \{Ce^{-2x} / C \in \mathbb{R}\}$

3. En déduire l'ensemble solution de (E).

Solution :

Les solutions de l'équation non homogène s'obtiennent en ajoutant à une solution particulière les solutions générales de l'équation homogène :

$$S = \left\{ Ce^{-2x} + \left(x - \frac{1}{3}\right) e^x / C \in \mathbb{R} \right\}$$

4. Déterminer la solution g de E pour que la courbe de la fonction passe par le point de coordonnées $(0, 2)$.

Solution :

On cherche C tel que $g(0) = 2$:

$$\begin{aligned} g(0) &= 2 \\ \Rightarrow \quad Ce^{-2\times 0} + \left(0 - \frac{1}{3}\right) e^0 &= 2 \\ \Rightarrow \quad C - \frac{1}{3} &= 2 \\ \Rightarrow \quad C &= \frac{7}{3} \end{aligned}$$

La fonction g est donc : $g(x) = \frac{7}{3}e^{-2x} + \left(x - \frac{1}{3}\right) e^x$.