

Applications aux équations différentielles du premier ordre

La variation de la température d'un corps, ou d'un liquide, laissé dans un environnement à une température ambiante constante, suit la loi de Newton :

$$\frac{dT}{dt} = k(T - T_A)$$

où T_A est la température ambiante constante.

k est une constante de proportionnalité qui dépend des conditions expérimentales. Cette constante est négative.

t est le temps, habituellement donné en minutes.

T est la température du corps. Cette température varie ; on pourrait la noter $T(t)$. On suppose que la température est maintenue homogène dans le liquide, ou le corps.

Exercice 1: La grand-mère de Théo sort un gratin du four, le plat étant alors à 100°C . Elle conseille à son petit-fils de ne pas le toucher afin de ne pas se brûler, et de laisser le plat se refroidir dans la cuisine dont la température ambiante est supposée constante à 20°C . Théo lui rétorque que quand il sera à 37°C , il pourra le toucher sans risque ; et sa grand-mère lui répond qu'il lui faudra attendre 30 minutes pour cela. La température du plat est donnée par une fonction g du temps t , exprimé en minutes, qui est solution de l'équation différentielle :

$$y' + 0,04y = 0,8$$

1. Retrouver la loi de Newton :

2. Utiliser un logiciel de calcul formel pour résoudre l'équation différentielle. (ne pas oublier la condition initiale...)

3. La grand-mère de Théo a-t-elle bien évalué le temps nécessaire pour atteindre 37°C ?

Exercice 2: A $t = 0$, le moteur éteint, la température du liquide de refroidissement est initialement à 90°C . On laisse la voiture dans le garage à 21°C . Au bout de 4 minutes, la température de ce liquide est mesuré à 82°C .

On note T la fonction exprimant la température du liquide de refroidissement en fonction du temps.

1. Déterminer l'équation différentielle vérifiée par T .

2. Résoudre l'équation en fonction de k grâce à la condition initiale.

3. Déterminer la valeur k grâce au deuxième relevé de température.

4. Quelle sera alors la température au bout de 20 minutes ?

Exercice 3 : Un verre d'eau, à 10°C , est sorti du réfrigérateur et déposé sur une table dans une pièce où il fait 31°C . Après 10 minutes, l'eau dans le verre est à 17°C . Combien de temps après la sortie du réfrigérateur l'eau sera-t-elle à 25°C ?

La réponse est environ de 31 minutes...