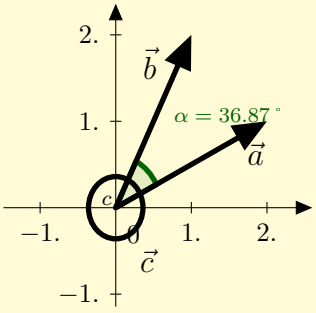
Produit vectoriel

Définition 1 :

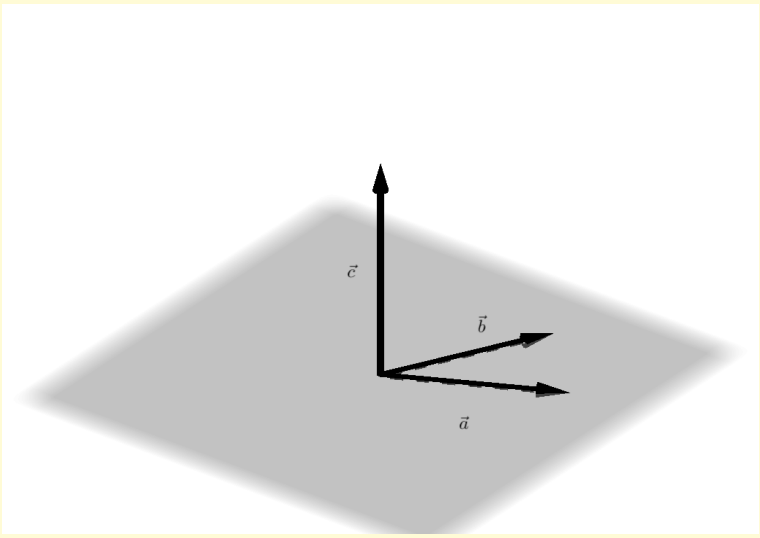
On considère deux vecteurs $\vec{a}$ et $\vec{b}$ non colinéaires.
On appelle produit vectoriel de $\vec{a}$ et $\vec{b}$, le vecteur $\vec{c}$, noté alors $\vec{a} \wedge \vec{b}$, vérifiant :

- $\|\vec{c}\| = \|\vec{a}\|\|\vec{b}\| \sin(\theta)$, où $\theta = \left(\vec{a}, \vec{b}\right)$.
- sa direction soit perpendiculaire à $\vec{a}$ et $\vec{b}$.
- son sens est donné par la "règle de la main droite".

Exemple 1 :



Pour $\vec{a} = \begin{pmatrix} 2 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}$ et $\vec{b} = \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 0 \end{pmatrix}$, avec $\left(\vec{a}, \vec{b}\right) = 36,87°$:



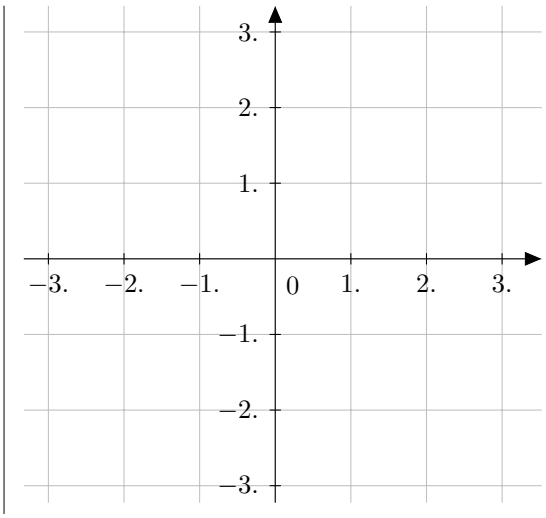
Déterminer :

- $\|\vec{a}\|$ = ...
- $\|\vec{b}\|$ = ...
- $\|\vec{c}\|$ = ...

Exercice 1 : Dans les cas suivants, déterminer la norme du produit scalaire, et sa direction (soit sortante de la feuille : $\odot$, soit rentrante dans la feuille : $\otimes$)

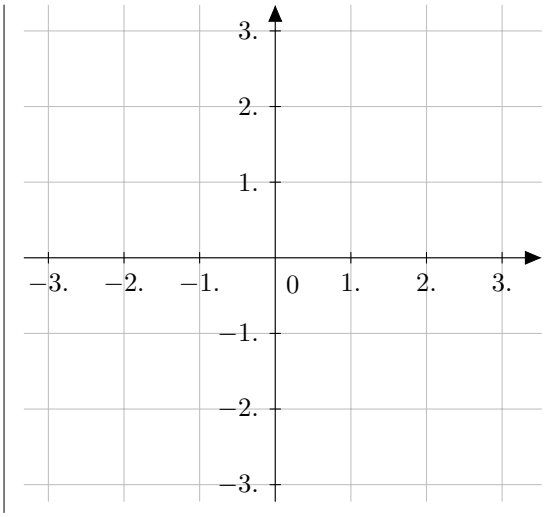
1. Pour $\vec{a} = \begin{pmatrix} -2 \\ 2 \\ 0 \end{pmatrix}$ et $\vec{b} = \begin{pmatrix} 0 \\ 2 \\ 0 \end{pmatrix}$, avec $\left(\vec{a}, \vec{b}\right) = -45°$:

   - $\|\vec{a}\| =$ .....
   - $\|\vec{b}\| =$ .....
   - $\|\vec{c}\| =$ .....



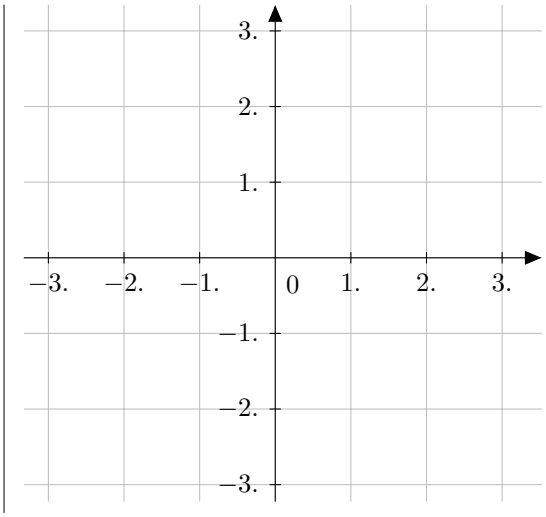
2. Pour $\vec{a} = \begin{pmatrix} -1 \\ -3 \\ 0 \end{pmatrix}$ et $\vec{b} = \begin{pmatrix} 3 \\ -1 \\ 0 \end{pmatrix}$, avec $\left(\vec{a}, \vec{b}\right) = 90°$:

   - $\|\vec{a}\| =$ .....
   - $\|\vec{b}\| =$ .....
   - $\|\vec{c}\| =$ .....



3. Pour $\vec{a} = \begin{pmatrix} 2 \\ -3 \\ 0 \end{pmatrix}$ et $\vec{b} = \begin{pmatrix} -2 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}$, avec $\left(\vec{a}, \vec{b}\right) = -150,26°$:

- $\|\vec{a}\| =$ .....
- $\|\vec{b}\| =$ .....
- $\|\vec{c}\| =$ .....



Propriété 1 :

Soit $\vec{a} = \begin{pmatrix} x_a \\ y_a \\ z_a \end{pmatrix}$ et $\vec{b} = \begin{pmatrix} x_b \\ y_b \\ z_c \end{pmatrix}$, on a :

$$\vec{c} = \vec{a} \wedge \vec{b} = \begin{pmatrix} y_a \times z_b - z_a \times y_b \\ z_a \times x_b - x_a \times z_b \\ x_a \times y_b - y_a \times x_b \end{pmatrix}$$

Exemple 2 :

Pour $\vec{a} = \begin{pmatrix} 2 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}$ et $\vec{b} = \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 0 \end{pmatrix}$ on a :

$$\vec{c} = \vec{a} \wedge \vec{b} = \begin{pmatrix} y_a \times z_b - z_a \times y_b \\ z_a \times x_b - x_a \times z_b \\ x_a \times y_b - y_a \times x_b \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \ldots \times \ldots - \ldots \times \ldots \\ \ldots \times \ldots - \ldots \times \ldots \\ \ldots \times \ldots - \ldots \times \ldots \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \ldots \\ \ldots \\ \ldots \end{pmatrix}$$

Exercice 2 : Déterminer le produit vectoriel dans les cas suivants :

- Pour $\vec{a} = \begin{pmatrix} 0 \\ 2 \\ 4 \end{pmatrix}$ et $\vec{b} = \begin{pmatrix} 0 \\ -2 \\ 1 \end{pmatrix}$

- Pour $\vec{a} = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}$ et $\vec{b} = \begin{pmatrix} -3 \\ 2 \\ 0 \end{pmatrix}$

- Pour $\vec{a} = \begin{pmatrix} -1 \\ 0 \\ 3 \end{pmatrix}$ et $\vec{b} = \begin{pmatrix} 0 \\ 2 \\ 3 \end{pmatrix}$

- Pour $\vec{a} = \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \\ -2 \end{pmatrix}$ et $\vec{b} = \begin{pmatrix} -1 \\ 3 \\ 1 \end{pmatrix}$

- Pour $\vec{a} = \begin{pmatrix} 2 \\ 3 \\ -1 \end{pmatrix}$ et $\vec{b} = \begin{pmatrix} -1 \\ 4 \\ -2 \end{pmatrix}$