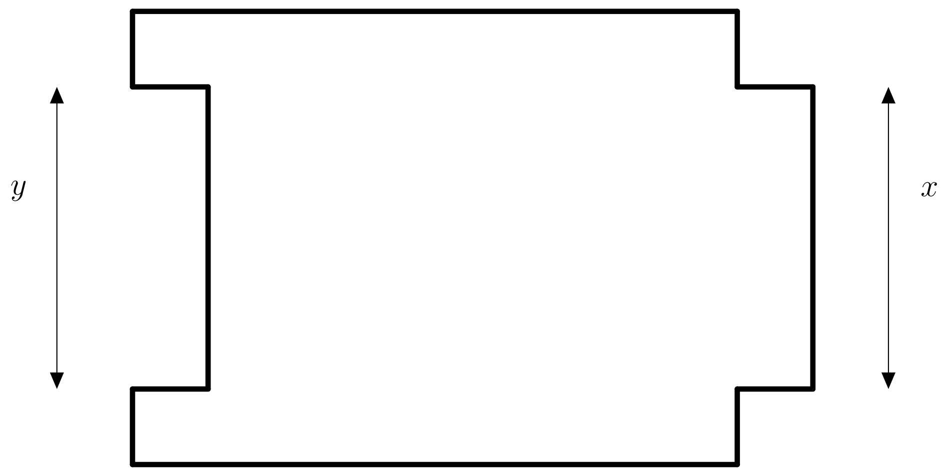
Statistique inférentielle

Exercice 1 :

Les trois parties de cet exercice sont indépendantes.

Une entreprise fabrique en grande série des pièces de bois. Ces pièces sont prévues pour s'encastrer les unes dans les autres.



A. Loi normale

Une pièce de type est conforme lorsque sa cote x, exprimée en millimètres, appartient à l'intervalle $[9,5\ ;\ 10,5]$ et lorsque sa cote y appartient à l'intervalle $[10,5\ ;\ 11,5]$.

1. On note X la variable aléatoire qui, à chaque pièce de ce type prélevée au hasard dans la production d'une journée, associe sa cote x. On suppose que la variable aléatoire X suit la loi normale de moyenne 10 et d'écart type 0,21.

   Calculer $P(9,5 \leqslant X \leqslant 10,5)$.

2. On note Y la variable aléatoire qui, à chaque pièce de ce type prélevée au hasard dans la production d'une journée, associe sa cote y. On admet que $P(10,5 \leqslant Y \leqslant 11,5) = 0,985$.

   On suppose que les variables aléatoires X et Y sont indépendantes.

   On prélève une pièce au hasard dans la production d'une journée. Déterminer la probabilité qu'elle soit conforme.

B. Loi binomiale

On considère un stock important de pièces.
On note E l'évènement : « une pièce prélevée au hasard dans le stock est défectueuse ».
On suppose que $P(E) = 0,03$.
On prélève au hasard 50 pièces dans le stock de pièces pour vérification. Le stock est suffisamment important pour que l'on puisse assimiler ce prélèvement à un tirage avec remise de 50 pièces. On considère la variable aléatoire Z qui, à tout prélèvement ainsi défini, associe le nombre de pièces de ce prélèvement qui sont défectueuses.

1. Justifier que la variable aléatoire Z suit une loi binomiale dont on déterminera les paramètres.
2. Calculer $P(Z = 0)$ et $P(Z \leqslant 2)$.

C. Intervalle de confiance

Dans cette partie, on considère une grande quantité de pièces devant être livrées à une chaîne d'hypermarchés. On considère un échantillon de 100 pièces prélevées au hasard dans cette livraison. La livraison est assez importante pour que l'on puisse assimiler ce tirage à un tirage avec remise.
On constate que 96 pièces sont sans défaut.

1. Donner une estimation ponctuelle de la fréquence inconnue p des pièces de cette livraison qui sont sans aucun défaut.
2. Soit F la variable aléatoire qui, à tout échantillon de 100 pièces prélevées au hasard et avec remise dans cette livraison, associe la fréquence des pièces de cet échantillon qui sont sans défaut.

   On suppose que F suit la loi normale de moyenne p et d'écart type $\sqrt{\dfrac{p(1-p)}{100}}$, où p est la fréquence inconnue des pièces de la livraison qui sont sans aucun défaut.

   Déterminer un intervalle de confiance de la fréquence p avec le coefficient de confiance de 95 %.

Exercice 2 : Une usine fabrique un très grand nombre de billes en acier spécial destinées à un certain type de roulement.
A- Loi normale

Une bille est conforme lorsque sa masse, exprimée en grammes, appartient à l'intervalle [14,92 ; 15,08].

1. On noie M la variable aléatoire qui, à chaque bille prélevée au hasard dans la production, associe sa masse. On suppose que la variable aléatoire M suit la loi normale de moyenne 15 et d'écart type $0,05$.

   Calculer la probabilité qu'une bille prélevée au hasard dans la production soit conforme.
2. La qualité de la production de billes étant jugée insuffisante, on effectue un réglage.

   On note M_1 la variable aléatoire qui, à chaque bille prélevée dans la nouvelle production future, associe sa masse. On suppose que la variable aléatoire M_1, suit une loi normale de moyenne 15 et d'écart type σ_1.

   On admet que la probabilité qu'une bille prélevée au hasard dans la nouvelle production soit conforme est alors égale à $0,99$.

   Déterminer σ_1.

B. Loi binomiale

On note E l'évènement : « une bille prélevée au hasard dans un stock important est défectueuse ».
On suppose que $P(E) = 0,01$.
Les roulements fabriqués avec ce type de billes contiennent 36 billes.

On prélève au hasard 36 billes dans un stock suffisamment important pour que l'on puisse assimiler ce prélèvement à un tirage avec remise de 36 billes.

On considère la variable aléatoire X qui, à tout prélèvement ainsi défini associe le nombre de billes de ce prélèvement qui sont défectueuses.

1. Justifier que la variable aléatoire X suit une loi binomiale dont on déterminera les paramètres.
2. (a) Déterminer la probabilité qu'il n'y ait aucune bille défectueuse dans un tel prélèvement.

   (b) Déterminer la probabilité qu'il y ait au plus deux billes défectueuses dans un tel prélèvement.

C. Test d'hypothèse

Pour la fabrication des roulements, les billes doivent peser 15 grammes.

On se propose de construire un test d'hypothèse bilatéral pour contrôler la moyenne m de l'ensemble des masses, en grammes, d'une importante livraison destinée au montage de roulements.

On note Z la variable aléatoire qui à chaque bille prélevée au hasard dans la livraison associe sa masse.

La variable aléatoire Z suit la loi normale de moyenne inconnue m et d'écart type $0,05$.

On désigne par $\overline{Z}$ la variable aléatoire qui, à chaque échantillon aléatoire de 36 pièces prélevé dans la livraison, associe la moyenne des masses des billes de cet échantillon. La livraison est assez importante pour que l'on puisse assimiler ces prélèvements à des tirages avec remise.

L'hypothèse nulle est $H_0 \ : \ m = 15$.

L'hypothèse alternative est $H_1 \ : \ m \neq 15$.

Le seuil de signification du test est fixé à $0,05$.

1. Énoncer la règle de décision permettant d'utiliser ce test en admettant, sous l'hypothèse nulle H_0, le résultat suivant, qui n'a pas à être démontré.

$$P(14,984 \leqslant \overline{Z} \leqslant 15,016) = 0,95.$$

2. On prélève un échantillon aléatoire de 36 billes dans la livraison et on calcule la moyenne des masses des billes de cet échantillon.

   On obtient $\overline{x} = 15,025$.

   Peut-on conclure, au seuil de risque de 0,05 que la livraison est conforme pour la masse ?

<u>Exercice 3 :</u> Une usine fabrique des ventilateurs en grande quantité. On s'intéresse à trois type de pièces : l'axe moteur, appelée pièce de type 1, l'ensemble des trois pales, appelé pièce de type 2 et le support, appelé pièce de type 3.

A. Loi normale

Une pièce de type 1 est conforme lorsque son diamètre d (voir la figure), exprimée en millimètres, appartient à l'intervalle $[29,8 \ ; \ 30,2]$.

On note X la variable aléatoire qui, à chaque pièce de type 1 prélevée au hasard dans la production des pièces de type 1, associe le diamètre d exprimé en millimètres. On suppose que la variable aléatoire X suit la loi normale de moyenne 30 et d'écart type 0,09.

Calculer la probabilité qu'une pièce prélevée au hasard dans la production des pièces de type 1 soit conforme.

B. Loi binomiale

On considère un stock important de pièces de type 2.

On note E l'évènement : « une pièce prélevée au hasard dans le stock de pièces de type 2 est défectueuse ».

On suppose que $P(E) = 0,03$.

On prélève au hasard 20 pièces dans le stock de pièces de type 2 pour vérification. Le stock est assez important pour que l'on puisse assimiler ce prélèvement à un tirage avec remise de 20 pièces de type 2.

On considère la variable aléatoire Y qui, à tout prélèvement ainsi défini, associe le nombre de pièces de ce prélèvement qui sont défectueuses.

1. Justifier que la variable aléatoire Y suit une loi binomiale dont on précisera les paramètres.
2. Calculer la probabilité qu'aucune pièce de ce prélèvement ne soit défectueuse.
3. Calculer la probabilité que, dans un tel prélèvement, une pièce au moins soit défectueuse.

C. Test d'hypothèse

Une importante commande de pièces de type 3 est passé à un sous-traitant. La hauteur du support doit être de 400 millimètres.

On se propose de construire un test d'hypothèse bilatéral pour contrôler, au moment de la livraison, la moyenne μ de l'ensemble des hauteurs, en millimètres, des pièces de type 3.

On note Z la variable aléatoire qui, à chaque pièce de type 3 prélevée au hasard dans la livraison associe sa hauteur.

La variable aléatoire Z suit la loi normale de moyenne inconnue μ et d'écart type $\sigma = 5$.

On désigne par $\overline{Z}$ la variable aléatoire qui, à chaque échantillon aléatoire de 100 pièces de type 3 prélevé dans la livraison, associe la moyenne des hauteurs des pièces de cet échantillon. La livraison est assez importante pour que l'on puisse assimiler ces prélèvements à des tirages avec remise.
L'hypothèse nulle est $H_0 : \mu = 400$.

L'hypothèse alternative est $H_1 : \mu \neq 400$.

Le seuil de signification du test est fixé à $0,05$.

1. Sous l'hypothèse H_0, on admet que la variable aléatoire $\overline{Z}$ suit la loi normale de moyenne 400 et d'écart type 0,5.

   Déterminer sous cette hypothèse le nombre réel h positif tel que :

   $$P(400 - h \leqslant \overline{Z} \leqslant 400 + h) = 0,95.$$

2. En déduire la règle de décision permettant d'utiliser ce test.
3. On prélève un échantillon aléatoire de 100 pièces dans la livraison reçue et on observe que, pour cet échantillon, la moyenne des hauteurs des pièces est $\overline{z} = 399,12$.

   Peut-on, au seuil de 5%, conclure que la livraison est conforme pour la hauteur ?