Loi normale

Exercice 1 : Une variable aléatoire X suit une loi normale $\mathcal{N}(0, 1)$.
On donne la valeur de la probabilité suivante :
$P(X \leqslant 0,3) = 0,6179$. Déterminer la probabilité des évènements suivants :

1. $(X = 0,3)$
2. $(X \geqslant 0,3)$
3. $(X < -0,3)$
4. $(X > -0,3)$
5. $(-0.3 \leqslant X \leqslant 0,3)$
6. $(0 \leqslant X \leqslant 0,3)$

Exercice 2 : Une variable aléatoire X suit une loi normale $\mathcal{N}(0, 1)$.
On donne la valeur des probabilités suivantes :
$P(X \leqslant 1) = 0,8413$ et $P(X \leqslant 2) = 0,9772$ Déterminer la probabilité des évènements suivants :

1. $(1 \leqslant X \leqslant 2)$
2. $(-2 \leqslant X \leqslant -1)$
3. $(-1 \leqslant X \leqslant 2)$
4. $(-2 \leqslant X \leqslant 1)$

Exercice 3 : Une variable aléatoire X suit une loi normale $\mathcal{N}(15, 2)$.
Déterminer la probabilité des évènements suivants :

1. $(X \leqslant 15)$
2. $(13 \leqslant X \leqslant 15)$
3. $(14 \leqslant X \leqslant 16)$
4. $(X > 14,5)$
5. $(X > 12)$
6. $(11.5 < X < 17)$
7. $(16,3 \leqslant X)$
8. $(16,7 \leqslant X \leqslant 18,2)$

Exercice 4 : Dans un centre de renseignement téléphonique, une étude statistique a été réalisée sur le temps d'attente, exprimé en seconde, subi par la clientèle avant d'amorcer la conversation avec un employé. Les résultats de cette étude conduisent à supposer que la variable aléatoire X qui associe à tout client le temps d'attente qu'il subit, suit une loi normale de moyenne 18 et d'écart type 7,2.

1. Calculer les probabilités que, lors d'un appel au centre, un client :
   (a) n'ait à subir aucune attente (c'est à dire $P(X \leqslant 0)$).
   (b) Ait à subir une attente de plus de vingt secondes.
2. On imagine qu'au cours d'une certaine semaine, un même client doit donner 5 appels, indépendants les uns des autres.
   On note Y la variable aléatoire exprimant le nombre de fois où, lors de ces cinq appels, le temps d'attente est supérieur à vingt secondes.

   (a) Préciser la loi de probabilité suivit par Y et donner ses paramètres.
   (b) Calculer $P(Y = 2)$ et et $P(Y \geqslant 1)$.

Exercice 5 : Une variable aléatoire X suit une loi normale $\mathcal{N}(10; 1,5)$.
Déterminer la valeur de a vérifiant dans chacun des cas les égalités suivantes :

1. $P(X \leqslant a) = 0,75$
2. $P(X \leqslant a) = 0,25$
3. $P(X > a) = 0,91$
4. $P(10 \leqslant X < a) = 0,33$
5. $(10 - a \leqslant X \leqslant 10 + a) = 0,5$
6. $(10 - a \leqslant X \leqslant 10 + a) = 0,99$

Exercice 6 : Une entreprise fabrique, en grande quantité, des pièces métalliques rectangulaires dont les cotes sont exprimées en millimètres.
Un contrôle de qualité consiste à vérifier que la longueur et la largeur des pièces sont conformes à la norme en vigueur.

Partie A On note El'évènement : "une pièce prélevée au hasard dans le stock de l'entreprise est conforme ". On suppose que la probabilité de l'évènement E est 0,9.
On prélève au hasard 10 pièces dans le stock. Le stock est assez important pour que l'on puisse assimiler ce prélèvement à un tirage avec remise de 10 pièces. On considère la variable aléatoire X qui, à tout prélèvement de 10 pièces, associe le nombre de pièces conformes parmi ces 10 pièces.

1. Justifier que la variable aléatoire X suit une loi binomiale dont on déterminera les paramètres.
2. Calculer la probabilité que, dans un tel prélèvement, 8 pièces au moins soient conformes.

Partie B Une partie des pièces de la production de l'entreprise est fabriquée par une machine automatique notée "machine 1 ". Soient M et N les variables aléatoires qui, à chaque pièce prélevée au hasard dans un lot très important fabriqué par la machine 1, associent respectivement sa longueur et sa largeur.
On suppose que M suit la loi normale de moyenne $m_1 = 250$ et d'écart-type $\sigma_1 = 1,94$. On suppose que N suit la loi normale de moyenne $m_2 = 150$ et d'écart-type $\sigma_2 = 1,52$.

1. Calculer la probabilité que la longueur d'une pièce prélevée au hasard dans ce lot soit comprise entre 246 et 254.
2. Calculer la probabilité que la largeur d'une pièce prélevée au hasard dans ce lot soit comprise entre 147 et 153.
3. Une pièce est conforme si sa longueur est comprise entre 246 et 254 et si sa largeur est comprise entre 147 et 153. On admet que les variables M et N sont indépendantes.
   Montrer que la probabilité qu'une pièce prélevée au hasard dans ce lot soit conforme est 0,914.

Partie C Une autre machine automatique de l'entreprise, notée " machine 2 " fabrique également ces mêmes pièces en grande quantité. On suppose que la probabilité qu'une pièce prélevée au hasard dans la production d'une journée de la machine 1 soit conforme est $p_1 = 0,914$ et que la probabilité qu'une pièce choisie au hasard dans la production de la machine 2 soit conforme est $p_2 = 0,879$. La machine 1 fournit 60 % de la production totale de ces pièces et la machine 2 le reste de cette production.
On prélève au hasard une pièce parmi la production totale de l'entreprise de la journée.
Toutes les pièces ont la même probabilité d'être tirées. On définit les évènements suivants :

- A : "la pièce provient de la machine 1 " ;
- B : " la pièce provient de la machine 2 " ;
- C : " la pièce est conforme ".

1. Déterminer les probabilités $P(A)$, $P(B)$, $P_A(C)$, $P_B(C)$.
2. En déduire $P(C \cap A)$ et $P(C \cap B)$.
3. Calculer $P(C)$