

Vecteurs

Exercice 1 : On considère les points $A(-2, 1, -7)$, $B(-4, -3, 2)$ et $C(0, 5, -16)$.

1. Déterminer les coordonnées des vecteurs $\overrightarrow{AB}$, $\overrightarrow{BC}$ et $\overrightarrow{AC}$.
2. Montrer que A est le milieu de $[BC]$.

Exercice 2 : On considère les points $A(-5, 3, -2)$, $B(-5, 4, 1)$ et $C(-4, 3, 1)$.

1. Déterminer les coordonnées des vecteurs $\overrightarrow{AB}$ et $\overrightarrow{AC}$.
2. Déterminer les distances AB et AC .
3. Que peut-on dire du triangle ABC ?

Exercice 3 : On considère les points $A(-1, 2, 4)$, $B(-3, 5, 5)$ et $C(5, -7, 1)$.

1. Déterminer les coordonnées des vecteurs $\overrightarrow{AB}$ et $\overrightarrow{AC}$.
2. Montrer que les points A , B et C sont alignés.

Exercice 4 : On considère les points $A(5, -4, 2)$, $B(-1, 3, 0)$ et $C(7, -2, 3)$.

1. Déterminer les distances AB , AC et BC .
2. Montrer que le triangle ABC est rectangle.

Exercice 5 : On considère les vecteurs suivants :

$$\vec{u} \begin{pmatrix} -2 \\ 1 \\ 3 \end{pmatrix} \text{ et } \vec{v} \begin{pmatrix} 4 \\ -3 \\ 5 \end{pmatrix}$$

1. Déterminer les coordonnées du vecteur $\vec{w}$ tel que $\vec{w} = 2\vec{u} - 3\vec{v}$.
2. Déterminer les coordonnées du vecteur $\vec{w}$ tel que $\vec{w} = -5\vec{u} - \vec{v}$.
3. On considère le point $A(3, -1, 4)$. Déterminer les coordonnées du point B tel que :

$$\overrightarrow{AB} = 3\vec{u} - 2\vec{v}$$

Exercice 6 : On considère les points $A(-2, 1, -4)$, $B(2, 2, -4)$ et $C\left(-\frac{5}{2}, 3, -4\right)$.

Déterminer la valeur des produits scalaires : $\overrightarrow{AB} \cdot \overrightarrow{AC}$, $\overrightarrow{BA} \cdot \overrightarrow{BC}$ et $\overrightarrow{CA} \cdot \overrightarrow{CB}$.
Quel est la nature du rectangle ABC ?

Exercice 7 : On considère les points $A(-2, -3, 1)$, $B(-1, 1, 1)$, et $C(1, -8, 1)$.

1. Déterminer les normes suivantes : $\|\overrightarrow{AB}\|$ et $\|\overrightarrow{AC}\|$.
2. Déterminer le produit scalaire des vecteurs $\overrightarrow{AB}$ et $\overrightarrow{AC}$.
3. En déduire une mesure de l'angle $(\overrightarrow{AB}, \overrightarrow{AC})$.

Exercice 8 : On considère les points $A(9, 1, 5)$, $B(-1, 2, 5)$, et $C(5, -3, 5)$.

1. Déterminer les normes suivantes : $\|\overrightarrow{AB}\|$ et $\|\overrightarrow{AC}\|$.
2. Déterminer le produit scalaire des vecteurs $\overrightarrow{AB}$ et $\overrightarrow{AC}$.
3. En déduire, à l'aide de la calculatrice, une valeur approchée d'une mesure de l'angle $(\overrightarrow{AB}, \overrightarrow{AC})$.

Exercice 9 : Pour $\vec{u} = \begin{pmatrix} 3 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}$ et $\vec{v} = \begin{pmatrix} 0 \\ -2 \\ 0 \end{pmatrix}$

Déterminer le produit vectoriel en utilisant les différentes définitions :

1. A l'aide de l'angle $(\vec{u}, \vec{v})$.
2. En utilisant uniquement les coordonnées.

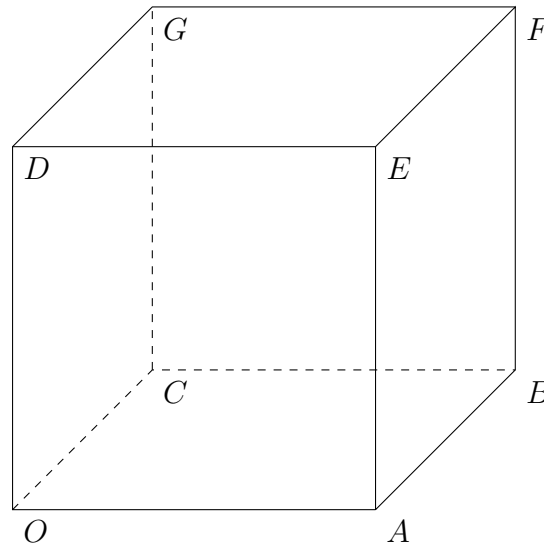
Exercice 10 : On pose $\vec{u} = \begin{pmatrix} 1 \\ -2 \\ 1 \end{pmatrix}$ et $\vec{v} = \begin{pmatrix} -3 \\ 6 \\ -3 \end{pmatrix}$

Montrer que les vecteurs sont colinéaires :

1. En déterminant un coefficient de colinéarité.
2. En utilisant le produit vectoriel.

Exercice 11 : On considère les points $A(-2, 1, 7)$, $B(4, 1, 5)$ et $C(-3, 2, 1)$.

1. Déterminer les coordonnées du point D tel que le quadrilatère $ABCD$ soit un parallélogramme.
2. Déterminer l'aire du parallélogramme $ABCD$.

Exercice 12 :

Soit le cube OABCDEFG représenté par la figure ci-dessus.

L'espace est orienté par le repère orthonormal direct $(O ; \overrightarrow{OA}, \overrightarrow{OC}, \overrightarrow{OD})$. On désigne par a un réel strictement positif.

L , M et K sont les points définis par $\overrightarrow{OL} = a\overrightarrow{OC}$, $\overrightarrow{OM} = a\overrightarrow{OA}$, et $\overrightarrow{BK} = a\overrightarrow{BF}$.

1.
 - a. Calculer les coordonnées du vecteur $\overrightarrow{DM} \wedge \overrightarrow{DL}$.
 - b. En déduire l'aire du triangle DLM .
 - c. Démontrer que la droite (OK) est orthogonale au plan (DLM) .
2. On note H le projeté orthogonal de O (et de K) sur le plan (DLM) .
 - a. Démontrer que $\overrightarrow{OM} \cdot \overrightarrow{OK} = \overrightarrow{OH} \cdot \overrightarrow{OK}$.
 - b. Les vecteurs $\overrightarrow{OH}$ et $\overrightarrow{OK}$ étant colinéaires, on note λ le réel tel que $\overrightarrow{OH} = \lambda \overrightarrow{OK}$.
Démontrer que $\lambda = \frac{a}{a^2 + 2}$. En déduire que H appartient au segment $[OK]$.
 - c. Déterminer les coordonnées de H .
 - d. Exprimer $\overrightarrow{HK}$ en fonction de $\overrightarrow{OK}$. En déduire que $HK = \frac{a^2 - a + 2}{\sqrt{a^2 + 2}}$.
3. À l'aide des questions précédentes, déterminer le volume du tétraèdre $DLMK$ en fonction de a .