

Correction équations différentielles du second ordre

Exercice 1: Résoudre les équations suivantes :

(a) $y'' + y' - 12y = 0$

Solution :

L'équation caractéristique est :

$$x^2 + x - 12 = 0$$

On trouve $\Delta = 49$. Il y a donc deux racines réelles :

$$\begin{cases} x_1 = 3 \\ x_2 = -4 \end{cases}$$

La solution est donc :

$$S_H = \{Ae^{3x} + Be^{-4x} / A \in \mathbb{R}, B \in \mathbb{R}\}$$

(b) $2y'' + 7y' + 3y = 0$

Solution :

L'équation caractéristique est :

$$2x^2 + 7x + 3 = 0$$

On trouve $\Delta = 25$. Il y a donc deux racines réelles :

$$\begin{cases} x_1 = -\frac{1}{2} \\ x_2 = -3 \end{cases}$$

La solution est donc :

$$S_H = \{Ae^{-\frac{1}{2}x} + Be^{-3x} / A \in \mathbb{R}, B \in \mathbb{R}\}$$

(c) $y'' = 9y$

Solution :

$y'' = 9y \Leftrightarrow y'' - 9y = 0$ L'équation caractéristique est :

$$x^2 - 9 = 0$$

On trouve $\Delta = 36$. Il y a donc deux racines réelles :

$$\begin{cases} x_1 = 3 \\ x_2 = -3 \end{cases}$$

La solution est donc :

$$S_H = \{Ae^{3x} + Be^{-3x} / A \in \mathbb{R}, B \in \mathbb{R}\}$$

(d) $y'' + 4y' + 13y = 0$

Solution :

L'équation caractéristique est :

$$x^2 + 4x + 13 = 0$$

On trouve $\Delta = -36$. Il y a donc deux racines complexes conjuguées :

$$\begin{cases} z_1 = -2 + 3i \\ z_2 = -2 - 3i \end{cases}$$

La solution est donc :

$$S_H = \{(A \cos(3x) + B \sin(3x))e^{-2x} / A \in \mathbb{R}, B \in \mathbb{R}\}$$

(e) $4y'' + 12y' + 9y = 0$

Solution :

L'équation caractéristique est :

$$4x^2 + 12x + 9 = 0$$

On trouve $\Delta = 0$. Il y a donc une racine réelle :

$$x_0 = -\frac{3}{2}$$

La solution est donc :

$$S_H = \{(Ax + B)e^{-\frac{3}{2}x} / A \in \mathbb{R}, B \in \mathbb{R}\}$$

(f) $y'' + 16y = 0$

Solution :

L'équation caractéristique est :

$$x^2 + 16 = 0$$

On trouve $\Delta = -64$. Il y a donc deux racines complexes conjuguées :

$$\begin{cases} z_1 = 4i \\ z_2 = -4i \end{cases}$$

La solution est donc :

$$S_H = \{A \cos(4x) + B \sin(4x) / A \in \mathbb{R}, B \in \mathbb{R}\}$$

Exercice 2 : On considère l'équation (E) suivante :

$$(E) \quad 3y'' - 10y' - 8y = -8x - 2$$

1. Résoudre l'équation homogène :

$$(E_H) \quad 3y'' - 10y' - 8y = 0$$

Solution :

L'équation caractéristique est :

$$3x^2 - 10x - 8 = 0$$

On trouve $\Delta = 196$. Il y a donc deux racines réelles :

$$\begin{cases} x_1 = 4 \\ x_2 = -\frac{2}{3} \end{cases}$$

La solution est donc :

$$S_H = \left\{ Ae^{4x} + Be^{-\frac{2}{3}x} / A \in \mathbb{R}, B \in \mathbb{R} \right\}$$

2. Montrer que la fonction f_0 définie sur $\mathbb{R}$ par $f_0(x) = x - 1$ est une solution particulière de (E) .

Solution :

On a $f_0(x) = x - 1$.

Donc $f'_0(x) = 1$ et $f''_0(x) = 0$.

En remplaçant dans l'équation :

$$\begin{aligned} 3f''_0(x) - 10f'_0(x) - 8f_0(x) &= 3 \times 0 - 10 \times 1 - 8(x - 1) \\ &= -10 - 8x + 8 \\ &= -8x - 2 \end{aligned}$$

On a donc bien f_0 solution particulière de (E) .

3. En déduire l'ensemble solution de (E) .

Solution :

Les solutions de l'équation sont obtenues en faisant la somme des solutions de l'équation homogène et d'une solution particulière. Ce qui donne :

$$S = \left\{ Ae^{4x} + Be^{-\frac{2}{3}x} + x - 1 / A \in \mathbb{R}, B \in \mathbb{R} \right\}$$

Exercice 3 : On considère l'équation (E) suivante :

$$(E) \quad y'' + 9y = 9x^2 + 9x + 11$$

1. Résoudre l'équation homogène :

$$(E_H) \quad y'' + 9y = 0$$

Solution :

L'équation caractéristique est :

$$x^2 + 9 = 0$$

On trouve $\Delta = -36$. Il y a donc deux racines complexes conjuguées :

$$\begin{cases} z_1 = 3i \\ z_2 = -3i \end{cases}$$

La solution est donc :

$$S_H = \{A \cos(3x) + B \sin(3x) / A \in \mathbb{R}, B \in \mathbb{R}\}$$

2. Montrer que la fonction f_0 définie sur $\mathbb{R}$ par $f_0(x) = x^2 + x + 1$ est une solution particulière de (E) .

Solution :

On a $f_0(x) = x^2 + x + 1$.

Donc $f_0'(x) = 2x + 1$ et $f_0''(x) = 2$.

En remplaçant dans l'équation :

$$\begin{aligned} f_0''(x) + 9f_0(x) &= 2 + 9(x^2 + x + 1) \\ &= 2 + 9x^2 + 9x + 9 \\ &= 9x^2 + 9x + 11 \end{aligned}$$

On a donc bien f_0 solution particulière de (E) .

3. En déduire l'ensemble solution de (E) .

Solution :

Les solutions de l'équation sont obtenues en faisant la somme des solutions de l'équation homogène et d'une solution particulière. Ce qui donne :

$$S = \{A \cos(3x) + B \sin(3x) + x^2 + x + 1 / A \in \mathbb{R}, B \in \mathbb{R}\}$$

Exercice 4 : On considère l'équation (E) suivante :

$$(E) \quad y'' + 5y' + 6y = 4e^{-2t}$$

1. Résoudre l'équation homogène : $(E_H) \quad y'' + 5y' + 6y = 0$

Solution :

L'équation caractéristique est :

$$x^2 + 5x + 6 = 0$$

On trouve $\Delta = 1$. Il y a donc deux racines réelles :

$$\begin{cases} x_1 = -2 \\ x_2 = -3 \end{cases}$$

La solution est donc :

$$S_H = \{Ae^{-2t} + Be^{-3t} / A \in \mathbb{R}, B \in \mathbb{R}\}$$

2. Montrer que la fonction $h(t) = 4te^{-2t}$ est une solution particulière de (E) .



Solution :

On a $f_0(t) = 4te^{-2t}$.

Donc $f'_0(t) = (4 - 8t)e^{-2t}$ et $f''_0(t) = (16t - 16)e^{-2t}$.

En remplaçant dans l'équation :

$$\begin{aligned} f''_0(t) + 5f'_0(t) + 6f_0(t) &= (16t - 16)e^{-2t} + 5(4 - 8t)e^{-2t} + 6 \times 4te^{-2t} \\ &= (16t - 16 + 20 - 40t + 24t)e^{-2t} \\ &= 4e^{-2t} \end{aligned}$$

On a donc bien f_0 solution particulière de (E) .

3. En déduire l'ensemble solution de (E) .



Solution :

Les solutions de l'équation sont obtenues en faisant la somme des solutions de l'équation homogène et d'une solution particulière. Ce qui donne :

$$S = \{Ae^{-2t} + Be^{-3t} + 4te^{-2t} / A \in \mathbb{R}, B \in \mathbb{R}\}$$

4. Déterminer la solution g de E vérifiant la condition initiale $g(0) = 3$ et $g'(0) = -2$.



Solution :

La fonction g est une solution de (E) , elle fait donc partie de S :

- On a $g(0) = 3$ donc $Ae^{-2 \times 0} + Be^{-3 \times 0} + 4 \times 0 \times e^{-2 \times 0} = 3$ soit $A + B = 3$.
- On a $g'(0) = -2$, il faut donc dériver g :
 $g'(t) = -2Ae^{-2t} - 3Be^{-3t} + (4 - 8t)e^{-2t}$.
 $g'(0) = -2$ donc $-2Ae^{-2 \times 0} - 3Be^{-3 \times 0} + (4 - 8 \times 0)e^{-2 \times 0} = -2$ soit $-2A - 3B + 4 = -2$, donc $-2A - 3B = -6$

On trouve donc deux équations :
$$\begin{cases} A + B = 3 \\ -2A - 3B = -6 \end{cases}$$

La résolution du système donne $A = 3$ et $B = 0$ (à l'aide de la calculatrice...)

On trouve donc : $g(t) = 3e^{-2t} + 4te^{-2t} = (3 + 4t)e^{-2t}$.

Exercice 5 : On considère l'équation (E) suivante :

$$(E) \quad y'' - 3y' + 2y = -e^x + 4$$

1. Résoudre l'équation homogène :

$$(E_H) \quad y'' - 3y' + 2y = 0$$

Solution :

L'équation caractéristique est :

$$x^2 - 3x + 2 = 0$$

On trouve $\Delta = 1$. Il y a donc deux racines réelles :

$$\begin{cases} x_1 = 2 \\ x_2 = 1 \end{cases}$$

La solution est donc :

$$S_H = \{Ae^{2x} + Be^x / A \in \mathbb{R}, B \in \mathbb{R}\}$$

2. Montrer que la fonction f_0 définie sur $\mathbb{R}$ par $f_0(x) = xe^x + 2$ est une solution particulière de (E) .

Solution :

On a $f_0(t) = xe^x + 2$.

Donc $f'_0(t) = (1+x)e^x$ et $f''_0(t) = (2+x)e^x$.

En remplaçant dans l'équation :

$$\begin{aligned} f''_0(t) - 3f'_0(t) + 2f_0(t) &= (2+x)e^x - 3(1+x)e^x + 2(xe^x + 2) \\ &= (2+x-3-3x+2x)e^x + 4 \\ &= -e^x + 4 \end{aligned}$$

On a donc bien f_0 solution particulière de (E) .

3. En déduire l'ensemble solution de (E) .

Solution :

Les solutions de l'équation sont obtenues en faisant la somme des solutions de l'équation homogène et d'une solution particulière. Ce qui donne :

$$S = \{Ae^{2x} + Be^x + xe^x + 2 / A \in \mathbb{R}, B \in \mathbb{R}\}$$

4. Déterminer la solution g de E vérifiant la condition initiale $g(0) = 0$ et $g'(0) = -2$.

Solution :

La fonction g est une solution de (E) , elle fait donc partie de S :

- On a $g(0) = 0$ donc $Ae^{2 \times 0} + Be^0 + 0 \times e^0 + 2 = 0$ soit $A + B = -2$.
- On a $g'(0) = -2$, il faut donc dériver g :
 $g'(t) = 2Ae^{2x} + Be^x + (1+x)e^x$.
 $g'(0) = -2$ donc $2Ae^{2 \times 0} + Be^0 + (1+0)e^0 = -2$ soit $2A + B + 1 = -2$, donc

$$2A + B = -3$$

On trouve donc deux équations : $\begin{cases} A + B = -2 \\ 2A + B = -3 \end{cases}$

La résolution du système donne $A = -1$ et $B = -1$ (à l'aide de la calculatrice...)

On trouve donc : $g(x) = -e^{2x} - e^x + xe^x + 2$.

Exercice 6 : On considère l'équation (E) suivante :

$$(E) \quad y'' + 4y' + 4y = xe^{-3x}$$

1. Résoudre l'équation homogène :

$$(E_H) \quad y'' + 4y' + 4y = 0$$

Solution :

L'équation caractéristique est :

$$x^2 + 4x + 4 = 0$$

On trouve $\Delta = 0$. Il y a donc une racine réelle :

$$x_0 = -2$$

La solution est donc :

$$S_H = \{(Ax + B)e^{-2x} / A \in \mathbb{R}, B \in \mathbb{R}\}$$

2. Montrer que la fonction f_0 définie sur $\mathbb{R}$ par $f_0(x) = (x + 2)e^{-3x}$ est une solution particulière de (E) .

Solution :

On a $f_0(t) = (x + 2)e^{-3x}$.

Donc $f'_0(t) = (-3x - 5)e^{-3x}$ et $f''_0(t) = (9x + 12)e^{-3x}$.

En remplaçant dans l'équation :

$$\begin{aligned} f''_0(t) + 4f'_0(t) + 4f_0(t) &= (9x + 12)e^{-3x} + 4(-3x - 5)e^{-3x} + 4(x + 2)e^{-3x} \\ &= (9x + 12 - 12x - 20 + 4x + 8)e^{-3x} \\ &= xe^{-3x} \end{aligned}$$

On a donc bien f_0 solution particulière de (E) .

3. En déduire l'ensemble solution de (E) .

Solution :

Les solutions de l'équation sont obtenues en faisant la somme des solutions de l'équation homogène et d'une solution particulière. Ce qui donne :

$$S = \{(Ax + B)e^{-2x} + (x + 2)e^{-3x} / A \in \mathbb{R}, B \in \mathbb{R}\}$$

4. Montrer que la fonction f définie sur $\mathbb{R}$ par $f(x) = (x + 2)(e^{-2x} + e^{-3x})$ est la solution de (E) qui vérifie $f(0) = 4$ et $f'(0) = -8$.

**Solution :**

Il y a 3 choses à vérifier :

- La fonction f est bien une solution, c'est à dire, qu'elle est bien élément de S .

En effet, en développant, on remarque que :

$$f(x) = (x + 2)e^{-2x} + (x + 2)e^{-3x}$$

En prenant $A = 1$ et $B = 2$, on retrouve bien un élément de S .

- A-t-on bien $f(0) = 4$:

$$\begin{aligned} f(0) &= (0 + 2)(e^0 + e^0) \\ &= 2 \times 2 \\ &= 4 \end{aligned}$$

La condition est bien vérifiée.

- A-t-on bien $f'(0) = -8$:

On doit dériver la fonction f :

$$f'(x) = 1 \times (e^{-2x} + e^{-3x}) + (x + 2)(-2e^{-2x} - 3e^{-3x})$$

On a donc :

$$\begin{aligned} f'(0) &= (e^0 + e^0) + 2(-2e^0 - 3e^0) \\ &= 2 + 2 \times (-5) \\ &= -8 \end{aligned}$$

La condition est bien vérifiée.

Les trois conditions étant vérifiées, on a donc bien le résultat.