Variables aléatoires

1 Loi binomiale

Définition 1 :

Lorsqu'on répète n fois, dans des conditions **identiques** et **indépendantes**, une même expérience de Bernoulli de paramètre p, alors la loi de probabilité de la variable aléatoire X qui associe le nombre de succès obtenus au bout des n répétition, est appelée loi binomiale de paramètres n et p. On note alors :

$$X \sim \mathcal{B}(n, p)$$

On a, pour tout entier k en entre 0 et n :

$$P(X = k) = \binom{n}{k} p^k \times (1-p)^{n-k}$$

Exemple 1 :

Pour une urne contenant 7 boules rouges et 3 boules bleues. Le joueur décide de tirer 5 fois consécutivement, en remettant à chaque tirage la boule dans l'urne. On note X la variable aléatoire associant le nombre de boules rouges obtenues au bout des 5 tirages.
On a donc :

$$X \sim \mathcal{B}(......, ...)$$

La probabilité d'obtenir exactement 3 boules rouges et donc 2 boules bleues est :

$$P(X = 3) = ...$$

Propriété 1 :

Si une variable aléatoire X suit la loi binomiale de paramètres n et p, alors

$$E(X) = np \text{ et } V(X) = np(1-p) \text{ et } \sigma(X) = \sqrt{np(1-p))}$$

2 Loi normale ou loi de Laplace-Gauss

Définition 2 :

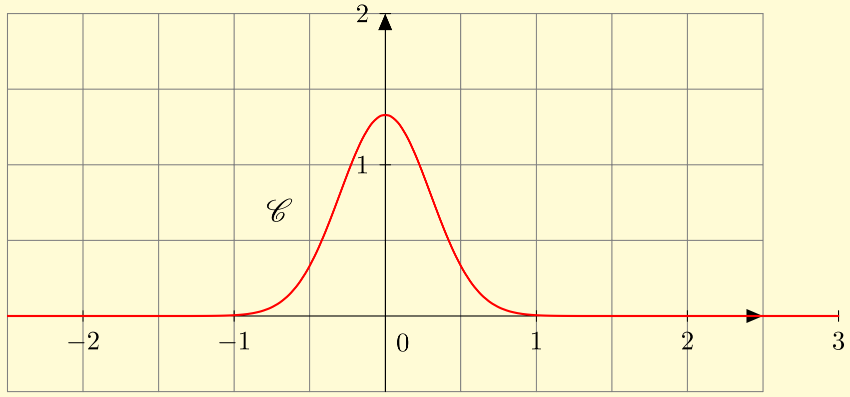
Soit σ un réel strictement positif, et m un réel.
On appelle loi normale de paramètre m et σ, notée $\mathcal{N}(m, \sigma)$ la loi de probabilité dont la densité f est la fonction définie sur $\mathbb{R}$ par :

$$f(x) = \frac{1}{\sigma\sqrt{2\pi}} e^{-\dfrac{(x-m)^2}{2\sigma^2}}$$

Exemple 2 :

Pour la loi normale $\mathcal{N}(0;0,3)$, on a :

$$\forall x \in [0,+\infty[, f(x) = \frac{1}{0.3\sqrt{2\pi}} e^{-\dfrac{x^2}{0.18}}$$



Propriété 2 :

On suppose que X suit la loi normale de paramètre $\mathcal{N}(m,\sigma)$:

$$\forall a \in [0,+\infty[, \forall b \in [0,+\infty[\ ,\ P(a \leqslant X \leqslant b) = \int_a^b \frac{1}{\sigma\sqrt{2\pi}} e^{-\dfrac{(x-m)^2}{2\sigma^2}}\, dt$$

$$\forall a \in [0,+\infty[\ ,\ P(X \leqslant a) = \int_{-\infty}^b \frac{1}{\sigma\sqrt{2\pi}} e^{-\dfrac{(x-m)^2}{2\sigma^2}}\, dt$$

$$\forall a \in [0,+\infty[\ ,\ P(X \geqslant a) = \int_a^{+\infty} \frac{1}{\sigma\sqrt{2\pi}} e^{-\dfrac{(x-m)^2}{2\sigma^2}}\, dt$$

Remarque :
Les calculs de probabilités avec une loi normale nécessiteront l'usage de la calculatrice. Pour calculer $P(a \leqslant X \leqslant b)$:
Pour la casio :
Dans le menu **RUN**, la direction est : OPTN $\hookrightarrow$ STAT $\hookrightarrow$ DIST $\hookrightarrow$ NORM $\hookrightarrow$ Ncd : puis on écrit NormCD (a,b, σ,m).
Pour la TI :
Dans le menu **distrib**, on choisit NormalFrep (a,b, m,σ).

Il est possible, grâce à la calculatrice, de déterminer la valeur d'un réel t tel que

$$P(X \leqslant t) = p_0$$

, où p_0 est donné :
Pour la casio :

Dans le menu **RUN**, la direction est : OPTN $\hookrightarrow$ STAT $\hookrightarrow$ DIST $\hookrightarrow$ NORM puis on écrit InvNormCD (p_0, σ,m).

Pour la TI :

Dans le menu **distrib**, on choisit FracNormale (p_0, m,σ).

Propriété 3 :

On suppose que X suit la loi normale de paramètre $\mathcal{N}(m, \sigma)$, on a :

$$E(X) = m$$
$$V(X) = \sigma^2$$

Propriété 4 :

On suppose que X suit la loi normale de paramètre $\mathcal{N}(m, \sigma)$, on a :

$$P(m - \sigma \leqslant X \leqslant m + \sigma) = 0,68 \text{ à } 10^{-2} \text{ près}$$
$$P(m - 2\sigma \leqslant X \leqslant m + 2\sigma) = 0,95 \text{ à } 10^{-2} \text{ près}$$
$$P(m - 3\sigma \leqslant X \leqslant m + 3\sigma) = 0,99 \text{ à } 10^{-2} \text{ près}$$

Propriété 5 :

Approximation :

Soit Y suivant la loi binomiale $\mathcal{B}(n;p)$ avec n "assez grand" (quelques dizaines au moins), np et $n(1-p)$ "pas trop petit".

On pose m l'espérance et σ l'écart-type de Y (donc $m = np$ et $\sigma = \sqrt{np(1-p)}$) , on a l'approximation suivante :

$$P(a \leq Y \leq b) \approx P(a \leq X \leq b)$$

avec X suivant la loi normale $\mathcal{N}(m, \sigma)$.

Exemple 3 :

Pour $Y \sim \mathcal{B}(500; 0.3)$. On a :

$m =$ .... et $\sigma =$ .... On a :

$P(149 \leq Y \leq 151) =$ ....

et

pour $X \sim \mathcal{N}(m, \sigma)$, on a :

$P(149 \leq X \leq 151) =$ ....