

Barycentres

On se place dans un repère orthonormal $(O; \vec{i}, \vec{j}, \vec{k})$.

1 Barycentres de deux points

1.1 Définition

Définition 1 :

On appelle barycentre de deux points pondérés (A, α) et (B, β) , noté $G = \text{bary} \{(A, \alpha); (B, \beta)\}$ avec $\alpha + \beta \neq 0$ le point G tel que :

$$\alpha \overrightarrow{GA} + \beta \overrightarrow{GB} = \vec{0}$$

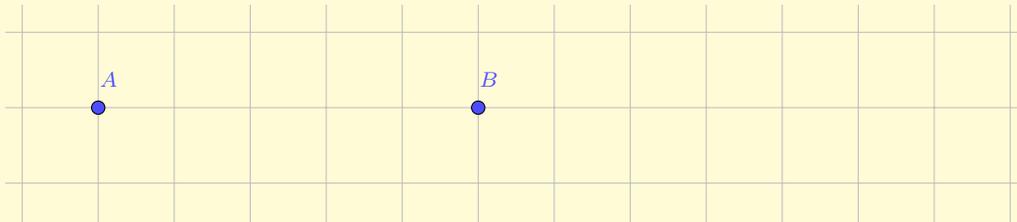
Remarque : le barycentre de deux points distincts appartient à la droite définie par ces deux points.

Exemple 1 :

On considère deux points A et B .

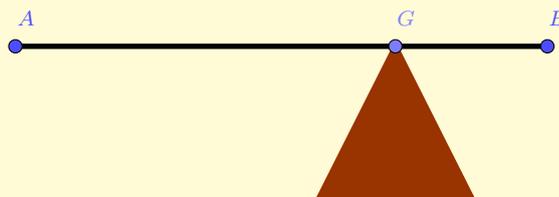
Déterminer le barycentre des systèmes suivants :

1. $G_1 = \text{bary} \{(A, 3); (B, 2)\}$.
2. $G_2 = \text{bary} \{(A, -1); (B, 2)\}$.



Exemple 2 :

On dispose de deux masses, A et B . Où placer le point G pour que la balance soit en équilibre sachant que les poids de A est 5 kg, et le poids de B est 8 kg ?



1.2 Propriétés

Propriété 1 :

On suppose que $\alpha + \beta \neq 0$, on note $G = \text{bary} \{(A, \alpha); (B, \beta)\}$.

- Pour tout M de l'espace on a :

$$\alpha \overrightarrow{MA} + \beta \overrightarrow{MB} = (\alpha + \beta) \overrightarrow{MG}$$

- En particulier

$$\overrightarrow{AG} = \frac{\beta}{\alpha + \beta} \overrightarrow{AB}$$

Remarque :

- Si $\alpha = \beta$, G s'appelle alors l'isobarycentre sur système, soit le milieu de $[A, B]$.
- G est inchangé si tous les coefficients sont multipliés par une constante non nul.

Exemple 3 :

Soit $G = \text{bary} \left\{ \left(A, \frac{4}{3} \right); \left(B, \frac{1}{2} \right) \right\}$, alors :

- G est le barycentre des points $(A, 8)$ et $(B, \dots\dots\dots)$
- G est le barycentre des points $(A, \dots\dots\dots)$ et $(B, 30)$

1.3 Coordonnées.

Propriété 2 :

Soit $A(x_A, y_A, z_A)$ et $B(x_B, y_B, z_B)$. Pour $G = \text{bary} \{(A, \alpha); (B, \beta)\}$ (avec $\alpha + \beta \neq 0$) . Les coordonnées de sont :

$$G \left(\frac{\alpha x_A + \beta x_B}{\alpha + \beta}; \frac{\alpha y_A + \beta y_B}{\alpha + \beta}; \frac{\alpha z_A + \beta z_B}{\alpha + \beta} \right)$$

Exemple 4 :

Pour $A(3, -1, 2)$ et $B(2, 3, -4)$. Déterminer les coordonnées du barycentre des systèmes suivants :

1. $G_1 = \text{bary} \{(A, 3); (B, 2)\}$.
2. $G_2 = \text{bary} \{(A, -1); (B, 2)\}$.

2 Barycentres de trois points

Définition 2 :

On appelle barycentre de deux points pondérés (A, α) , (B, β) et (C, γ) , noté $G = \text{bary} \{(A, \alpha); (B, \beta); (C, \gamma)\}$ avec $\alpha + \beta + \gamma \neq 0$ le point G tel que :

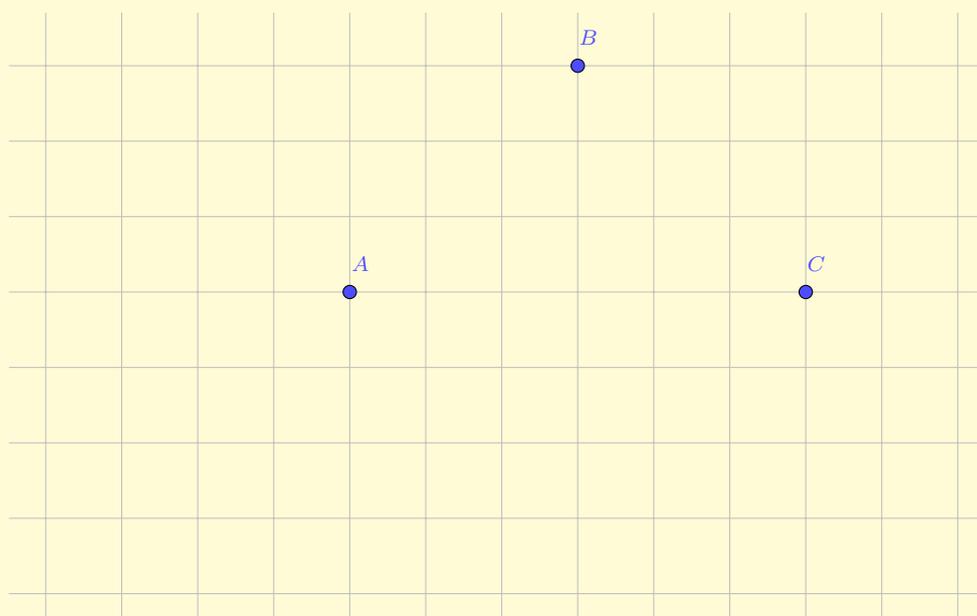
$$\alpha \overrightarrow{GA} + \beta \overrightarrow{GB} + \gamma \overrightarrow{GC} = \vec{0}$$

Exemple 5 :

On considère deux points A , B et C .

Déterminer le barycentre des systèmes suivants :

1. $G_1 = \text{bary} \{(A, 3); (B, 2); (C, 1)\}$.
2. $G_2 = \text{bary} \{(A, -1); (B, -1); (C, 1)\}$.



Propriété 3 :

Si $\alpha + \beta \neq 0$ alors $G = \text{bary} \{(A, \alpha); (B, \beta); (C, \gamma)\} = \text{bary} \{(G_1, \alpha + \beta); (C, \gamma)\}$ où $G_1 = \text{bary} \{(A, \alpha); (B, \beta)\}$