Vecteurs

On se place dans un repère orthonormal $\left(O;\vec{i},\vec{j},\vec{k}\right)$.

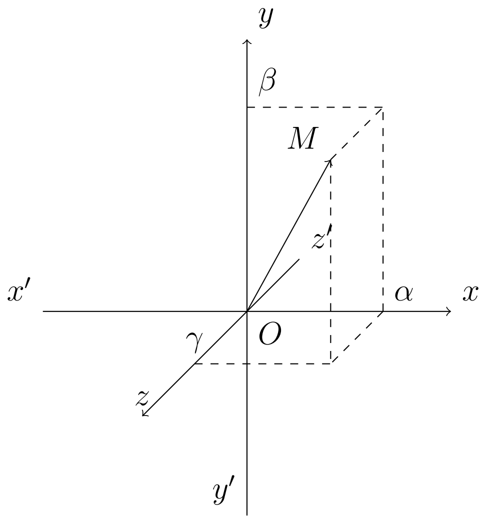
1 Coordonnées

1.1 Définition

Définition 1 :

Pour tout vecteur $\vec{u}$, il existe trois réels α, β et γ tel que $\vec{u}=\alpha\vec{i}+\beta\vec{j}+\gamma\vec{k}$ appelés coordonnées de $\vec{u}$ dans la base $\left(\vec{i},\vec{j},\vec{k}\right)$. On note alors $\vec{u}\begin{pmatrix}\alpha\\\beta\\\gamma\end{pmatrix}$

Ces coordonnées correspondent aux coordonnées du point M tel que $\vec{u}=\overrightarrow{OM}$.



Propriété 1 :

Soit $A\left(x_A,y_A,z_A\right)$ et $B\left(x_B,y_B,z_B\right)$, les coordonnées de $\overrightarrow{AB}$ sont $\overrightarrow{AB}\begin{pmatrix}x_B-x_A\\y_B-y_A\\z_B-z_A\end{pmatrix}$

Exemple 1 :

Pour $A(5,-4,3)$ et $B(-1,3,7)$ a pour coordonnées $\overrightarrow{AB}\begin{pmatrix}-6\\7\\4\end{pmatrix}$

Exercice 1 : On considère les points $A\left(-2,3,5\right)$, $B\left(-1,3,-4\right)$ et $C\left(-7,4,-3\right)$. Déterminer les coordonnées des vecteurs suivants :

$\overrightarrow{AB}\begin{pmatrix}\\\\\end{pmatrix}$ | $\overrightarrow{AC}\begin{pmatrix}\\\\\end{pmatrix}$ | $\overrightarrow{CB}\begin{pmatrix}\\\\\end{pmatrix}$

1.2 Norme d'un vecteur

Propriété 2 :

Soit $\vec{u}\begin{pmatrix}\alpha\\ \beta\\ \gamma\end{pmatrix}$, la norme du vecteur $\vec{u}$, notée $\|\vec{u}\|$ est donné par :

$$\|\vec{u}\| = \sqrt{\alpha^2+\beta^2+\gamma^2}$$

Soit $A\,(x_A, y_A, z_A)$ et $B\,(x_B, y_B, z_B)$, la norme du vecteur $\overrightarrow{AB}$, est donné par :

$$\left\|\overrightarrow{AB}\right\| = AB = \sqrt{(x_B-x_A)^2+(y_B-y_A)^2+(z_B-z_A)^2}$$

Exemple 2 :

Pour $A(5,-4,3)$ et $B(-1,3,7)$ a

$$AB = \sqrt{(-6)^2+7^2+4^2} = \sqrt{101}$$

Exercice 2 : Pour $A(-3,1,4)$ et $B(1,-2,3)$, déterminer la distance AB.

2 Propriété

2.1 Egalités

Propriété 3 :

Deux vecteurs $\vec{u}\begin{pmatrix}\alpha\\ \beta\\ \gamma\end{pmatrix}$ et $\vec{v}\begin{pmatrix}\alpha'\\ \beta'\\ \gamma'\end{pmatrix}$ sont égaux si et seulement s'ils ont les mêmes coordonnées :

$$\vec{u}\begin{pmatrix}\alpha\\ \beta\\ \gamma\end{pmatrix} = \vec{v}\begin{pmatrix}\alpha'\\ \beta'\\ \gamma'\end{pmatrix} \Leftrightarrow \begin{cases}\alpha=\alpha'\\ \beta=\beta'\\ \gamma=\gamma'\end{cases}$$

Exercice 3 : On considère le point $A\,(-2,1,5)$ et le vecteur $\vec{u}\begin{pmatrix}5\\ -2\\ 3\end{pmatrix}$. Déterminer les coordonnées du points B tel que $\overrightarrow{AB} = \vec{u}$.

2.2 Combinaison

Propriété 4 :

Soit deux vecteurs $\vec{u}$ et $\vec{v}$ on a :

- $\forall k \in \mathbb{R}, k\vec{u}\begin{pmatrix}k\alpha\\ k\beta\\ k\gamma\end{pmatrix}$
- $\vec{u}+\vec{v}\begin{pmatrix}\alpha+\alpha'\\ \beta+\beta'\\ \gamma+\gamma'\end{pmatrix}$

Exercice 4 : Soit $\vec{u}\begin{pmatrix}3\\-2\\5\end{pmatrix}$ et $\vec{v}\begin{pmatrix}1\\7\\-1\end{pmatrix}$.

1. Déterminer les coordonnées du vecteur $2\vec{u}+3\vec{v}$.
2. Déterminer les coordonnées du vecteur $3\vec{u}-4\vec{v}$.

2.3 Colinéarité

Propriété 5 :

Deux vecteurs $\vec{u}\begin{pmatrix}\alpha\\\beta\\\gamma\end{pmatrix}$ et $\vec{v}\begin{pmatrix}\alpha'\\\beta'\\\gamma'\end{pmatrix}$ sont colinéaires si les coordonnées sont proportionnelles.
On a donc l'existence d'un réel k tel que $\vec{u}=k\vec{v}$.

Exemple 3 :

Les vecteurs $\vec{u}\begin{pmatrix}3\\-2\\5\end{pmatrix}$ et $\vec{v}\begin{pmatrix}-9\\6\\-15\end{pmatrix}$ sont colinéaires.

3 Produit scalaire

3.1 Définitions

Définition 2 :

Définition avec les normes
Soit deux vecteurs $\vec{u}$ et $\vec{v}$, on définit le produit scalaire, noté $\vec{u}\cdot\vec{v}$, par le nombre réel :

$$\vec{u}\cdot\vec{v}=\frac{1}{2}\left(\|\vec{u}+\vec{v}\|^2-\|\vec{u}\|^2-\|\vec{v}\|^2\right)$$

Exercice 5 : On considère deux vecteurs $\vec{u}\begin{pmatrix}1\\2\\3\end{pmatrix}$ et $\vec{v}\begin{pmatrix}3\\2\\1\end{pmatrix}$.
Déterminer les normes des vecteurs $\vec{u}$, $\vec{v}$ et $\vec{u}+\vec{v}$.
En déduire la valeur de $\vec{u}\cdot\vec{v}$.

Définition 3 :

Définition avec les coordonnées

Soit deux vecteurs $\vec{u}\begin{pmatrix}\alpha\\\beta\\\gamma\end{pmatrix}$ et $\vec{v}\begin{pmatrix}\alpha'\\\beta'\\\gamma'\end{pmatrix}$, on définit le produit scalaire par :

$$\vec{u}\cdot\vec{v}=\alpha\alpha'+\beta\beta'+\gamma\gamma'$$

Exercice 6 : Retrouver l'expression de $\vec{u}\cdot\vec{v}$ de l'exercice précédent.

Définition 4 :

Définition avec les angles

Soit deux vecteurs $\vec{u}$ et $\vec{v}$, on définit le produit scalaire, noté $\vec{u} \cdot \vec{v}$, par le nombre réel :

$$\vec{u} \cdot \vec{v} = \|\vec{u}\| \, \|\vec{v}\| \cos(\vec{u}, \vec{v})$$

Exercice 7 : Déterminer l'angle entre $\vec{u}$ et $\vec{v}$ des exercices précédents.

Définition 5 :

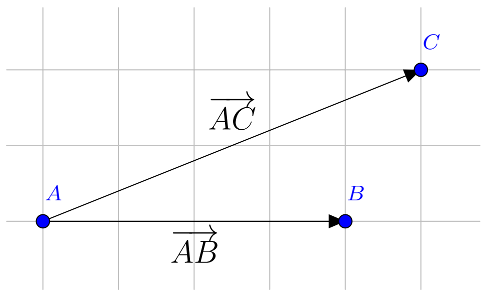
Définition avec les projections

On considère trois points O, A et B.

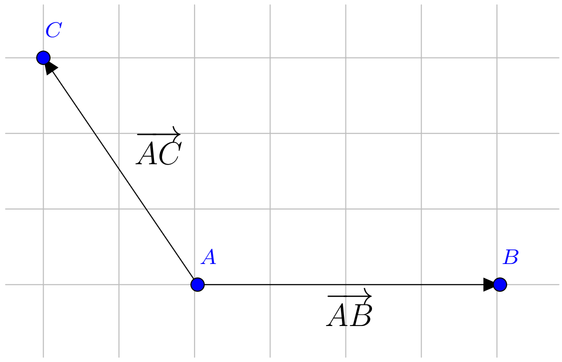
On a : $\overrightarrow{OA} \cdot \overrightarrow{OB} = \overline{OA} \times \overline{OH}$ où H est le projeté orthogonal de B sur (OA), et $\overline{OA}$ est la mesure algébrique de OA.

- Si A et H sont du même côté par rapport à O, on a : $\overrightarrow{OA} \cdot \overrightarrow{OB} = OA \times OH$.
- Sinon : $\overrightarrow{OA} \cdot \overrightarrow{OB} = -OA \times OH$

Exercice 8 : Déterminer le produit scalaire $\overrightarrow{AB} \cdot \overrightarrow{AC}$ dans les cas suivants (l'unité étant le carreau) :



$\overrightarrow{AB} \cdot \overrightarrow{AC} =$..



$\overrightarrow{AB} \cdot \overrightarrow{AC} =$..

3.2 Propriétés

Propriété 6 :

Pour tous vecteurs $\vec{u}$, $\vec{v}$, $\vec{w}$, on a :

- $\vec{u}\cdot\vec{v} = \vec{v}\cdot\vec{u}$
- $\vec{u}\cdot\vec{u} = \|\vec{u}\|^2$
- $\vec{u}\cdot(\vec{v}+\vec{w}) = \vec{u}\cdot\vec{v} + \vec{u}\cdot\vec{w}$
- $\vec{u}\cdot(k\vec{v}) = k\times\vec{u}\cdot\vec{v}$, où $k\in\mathbb{R}$
- $\vec{u}^2 = \vec{u}\cdot\vec{u} = \|\vec{u}\|^2$ (Carré scalaire)
- Identité remarquables :

$$(\vec{u}+\vec{v})^2 = \vec{u}^2 + 2\vec{u}\cdot\vec{v} + \vec{v}^2$$

$$(\vec{u}+\vec{v})\cdot(\vec{u}-\vec{v}) = \vec{u}^2 - \vec{v}^2$$

Propriété 7 :

Deux vecteurs non nuls sont orthogonaux si et seulement si leur produit scalaire est nul :

$$\vec{u}\cdot\vec{v} = 0 \Leftrightarrow \vec{u}\perp\vec{v}$$

Exercice 9 : Montrer que les vecteurs $\vec{u}\begin{pmatrix}2\\-1\\5\end{pmatrix}$ et $\vec{v}\begin{pmatrix}-3\\4\\2\end{pmatrix}$ sont orthogonaux :

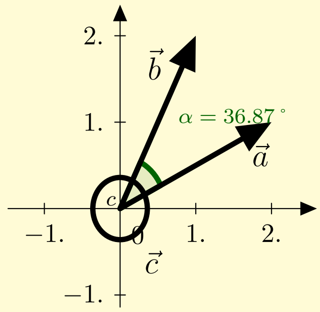
4 Produit vectoriel

Définition 6 :

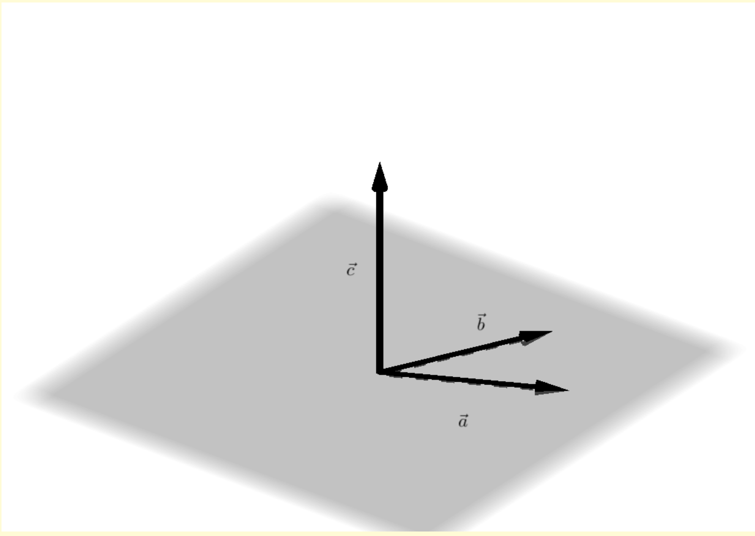
Soit $\vec{u}$ et $\vec{v}$ deux vecteurs de l'espace orienté.
On définit le produit vectoriel, noté $\vec{u}\wedge\vec{v}$, de $\vec{u}$ et $\vec{v}$ par le vecteur défini par :

- Si $\vec{u}$ et $\vec{v}$ sont colinéaires, $\vec{u}\wedge\vec{v} = \vec{0}$.
- Sinon, on note $\vec{w}$ le vecteur $\vec{w} = \vec{u}\wedge\vec{v}$ vérifie :
  - $\vec{w}$ est orthogonal à $\vec{u}$ et à $\vec{v}$.
  - La base $(\vec{u},\vec{v},\vec{w})$ est directe (configuration à l'aide de la main droite).
  - $\|\vec{w}\| = \|\vec{u}\|\times\|\vec{v}\|\times|\sin(\vec{u},\vec{v})|$

Exemple 4 :



Pour $\vec{a} = \begin{pmatrix} 2 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}$ et $\vec{b} = \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 0 \end{pmatrix}$, avec $\left(\vec{a}, \vec{b}\right) = 36,87^\circ$:

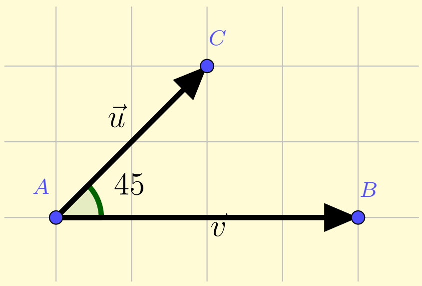


Déterminer :

- $\|\vec{a}\| =$ ....
- $\|\vec{b}\| =$ ....
- $\|\vec{c}\| =$ ....

Exemple 5 :

Déterminer le produit vectoriel $\vec{u} \wedge \vec{v}$.



Propriété 8 :

Pour tous vecteurs $\vec{u}$, $\vec{v}$, $\vec{w}$, et $k \in \mathbb{R}$ on a :

- $\vec{u} \wedge \vec{v} = -\vec{v} \wedge \vec{u}$
- $(k\vec{u}) \wedge \vec{v} = \vec{u} \wedge (k\vec{v}) = k(\vec{u} \wedge \vec{v})$
- $\vec{u} \wedge (\vec{v} + \vec{w}) = \vec{u} \wedge \vec{v} + \vec{u} \wedge \vec{w}$

Propriété 9 :

Soit $\vec{a} = \begin{pmatrix} x_a \\ y_a \\ z_a \end{pmatrix}$ et $\vec{b} = \begin{pmatrix} x_b \\ y_b \\ z_b \end{pmatrix}$, on a :

$$\vec{c} = \vec{a} \wedge \vec{b} = \begin{pmatrix} y_a \times z_b - z_a \times y_b \\ z_a \times x_b - x_a \times z_b \\ x_a \times y_b - y_a \times x_b \end{pmatrix}$$

Exemple 6 :

Pour $\vec{a} = \begin{pmatrix} 2 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}$ et $\vec{b} = \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 0 \end{pmatrix}$ on a :

$$\vec{c} = \vec{a} \wedge \vec{b} = \begin{pmatrix} y_a \times z_b - z_a \times y_b \\ z_a \times x_b - x_a \times z_b \\ x_a \times y_b - y_a \times x_b \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \ldots \times \ldots - \ldots \times \ldots \\ \ldots \times \ldots - \ldots \times \ldots \\ \ldots \times \ldots - \ldots \times \ldots \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \ldots \\ \ldots \\ \ldots \end{pmatrix}$$

<u>Exercice 10 :</u> Déterminer le produit vectoriel dans les cas suivants :

- Pour $\vec{a} = \begin{pmatrix} 0 \\ 2 \\ 4 \end{pmatrix}$ et $\vec{b} = \begin{pmatrix} 0 \\ -2 \\ 1 \end{pmatrix}$

- Pour $\vec{a} = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}$ et $\vec{b} = \begin{pmatrix} -3 \\ 2 \\ 0 \end{pmatrix}$

- Pour $\vec{a} = \begin{pmatrix} -1 \\ 0 \\ 3 \end{pmatrix}$ et $\vec{b} = \begin{pmatrix} 0 \\ 2 \\ 3 \end{pmatrix}$

- Pour $\vec{a} = \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \\ -2 \end{pmatrix}$ et $\vec{b} = \begin{pmatrix} -1 \\ 3 \\ 1 \end{pmatrix}$

- Pour $\vec{a} = \begin{pmatrix} 2 \\ 3 \\ -1 \end{pmatrix}$ et $\vec{b} = \begin{pmatrix} -1 \\ 4 \\ -2 \end{pmatrix}$