Chapitre 2

Équations différentielles

Correction des exercices du cours

1 Premier ordre

1.1 Équation homogène à coefficients constants :

Exercice 1 : Résoudre les équations suivantes :

(a) $y' + 7y = 0$

Solution :

$S_H = \{Ce^{-7t} / C \in \mathbb{R}\}$

(b) $4y' + 3y = 0$

Solution :

$S_H = \left\{Ce^{-\frac{3}{4}t} / C \in \mathbb{R}\right\}$

(c) $y' = 5y$

Solution :

$y' = 5y \Leftrightarrow y' - 5y = 0$
$S_H = \{Ce^{-5t} / C \in \mathbb{R}\}$

(d) $y' = -3y$

Solution :

$y' = -3y \Leftrightarrow y' + 3y = 0$
$S_H = \{Ce^{-3t} / C \in \mathbb{R}\}$

1.2 Équation non homogène à coefficients constants :

Exercice 2 : Pour les différentes équations, montrer que la fonction f_0 donnée est une solution particulière de (E).

(a) $y' - 3y = 6$ avec $f_0(t) = -2$

Solution :

$y' - 3y = 6$ avec $f_0(t) = -2$
On a $f_0'(t) = 0$, donc :

$$\begin{aligned} f_0'(t) - 3f_0(t) &= 0 - 3 \times (-2) \\ &= 6 \end{aligned}$$

La fonction f_0 est donc bien une solution particulière de l'équation différentielle.

(b) $2y' + y = t^2 + 4t - 1$ avec $f_0(t) = t^2 - 1$

Solution :

$2y' + y = t^2 + 4t - 1$ avec $f_0(t) = t^2 - 1$

On a $f_0'(t) = 2t$, donc :

$$\begin{aligned} 2f_0'(t) + f_0(t) &= 2 \times 2t + t^2 - 1 \\ &= t^2 + 4t - 1 \end{aligned}$$

La fonction f_0 est donc bien une solution particulière de l'équation différentielle.

(c) $3y' - 2y = t$ avec $f_0(t) = -\dfrac{1}{2}t - \dfrac{3}{4}$

Solution :

$3y' - 2y = t$ avec $f_0(t) = -\dfrac{1}{2}t - \dfrac{3}{4}$

On a $f_0'(t) = -\dfrac{1}{2}$, donc :

$$\begin{aligned} 3f_0'(t) - 2f_0(t) &= 3 \times \left(-\frac{1}{2}\right) - 2\left(-\frac{1}{2}t - \frac{3}{4}\right) \\ &= -\frac{3}{2} + t + \frac{3}{2} \\ &= t \end{aligned}$$

La fonction f_0 est donc bien une solution particulière de l'équation différentielle.

(d) $y' + y = e^{-t}$ avec $f_0(t) = (t+2)e^{-t}$

Solution :

$y' + y = e^{-t}$ avec $f_0(t) = (t+2)e^{-t}$

On a $f_0'(t) = 1 \times e^{-t} + (t+2)(-e^{-t}) = (-t-1)e^{-t}$, donc :

$$\begin{aligned} f_0'(t) + f_0(t) &= (-t-1)e^{-t} + (t+2)e^{-t} \\ &= (-t-1+t+2)e^{-t} \\ &= e^{-t} \end{aligned}$$

La fonction f_0 est donc bien une solution particulière de l'équation différentielle.

Exercice 3 : On considère l'équation (E) suivante :

$$(E) \quad y' - 4y = -4x - 3$$

1. Résoudre l'équation homogène :

$$(E_H) \quad y' - 4y = 0$$

Solution :

D'après le cours, les solutions de l'équation homogène sont :

$$S_H = \left\{Ce^{4x} / C \in \mathbb{R}\right\}$$

2. Montrer que la fonction f_0 définie sur $\mathbb{R}$ par $f_0(x) = x + 1$ est une solution particulière de (E).

Solution :

Avec $f_0(x) = x + 1$, on a $f_0'(t) = 1$, donc :

$$\begin{array}{rcl} f_0'(t) + f_0(t) & = & 1 - 4(x+1) \\ & = & 1 - 4x - 4 \\ & = & -4x - 3 \end{array}$$

La fonction f_0 est donc bien une solution particulière de l'équation différentielle.

3. En déduire l'ensemble solution de (E).

Solution :

Les solutions de l'équation non homogène s'obtiennent en ajoutant à une solution particulière les solutions générales de l'équation homogène :

$$S = \left\{ Ce^{4x} + x + 1 / C \in \mathbb{R} \right\}$$

1.3 Conditions initiales

Exercice 4 : On considère l'équation (E) suivante :

$$(E) \quad 2y' - y = -x^2 + 4$$

1. Résoudre l'équation homogène :$(E_H) \quad 2y' - y = 0$

Solution :

D'après le cours, les solutions de l'équation homogène sont :

$$S_H = \left\{ Ce^{\frac{1}{2}x} / C \in \mathbb{R} \right\}$$

2. Montrer que la fonction f_0 définie sur $\mathbb{R}$ par $f_0(x) = (x+2)^2$ est une solution particulière de (E).

Solution :

On a $f_0(x) = (x+2)^2 = x^2 + 4x + 4$

Donc $f_0'(t) = 2x + 4$, donc :

$$\begin{array}{rcl} 2f_0'(t) - f_0(t) & = & 2(2x+4) - (x^2 + 4x + 4) \\ & = & 4x + 8 - x^2 - 4x - 4 \\ & = & -x^2 + 4 \end{array}$$

La fonction f_0 est donc bien une solution particulière de l'équation différentielle.

3. En déduire l'ensemble solution de (E).

Solution :

Les solutions de l'équation non homogène s'obtiennent en ajoutant à une solution particulière les solutions générales de l'équation homogène :

$$S = \left\{ Ce^{\frac{1}{2}x} + (x+2)^2 / C \in \mathbb{R} \right\}$$

4. Déterminer la solution g de E vérifiant la condition initiale $g(0) = 5$.

Solution :

On cherche C tel que $g(0) = 5$:

$$\begin{array}{rrcl} & g(0) & = & 5 \\ \Rightarrow & Ce^{\frac{1}{2}\times 0} + (0+2)^2 & = & 5 \\ \Rightarrow & C + 4 & = & 5 \\ \Rightarrow & C & = & 1 \end{array}$$

La fonction g est donc : $g(x) = e^{\frac{1}{2}x} + (x+2)^2$.

2 Second ordre

2.1 Équation homogène à coefficients constants :

Exercice 5 : Résoudre les équations suivantes :

(a) $3y'' - y' - 2y = 0$

Solution :

L'équation caractéristique est :

$$3x^2 - x - 2 = 0$$

On trouve $\Delta = 25$. Il y a donc deux solutions réelles :

$$\begin{cases} x_1 = 1 \\ x_2 = -\dfrac{2}{3} \end{cases}$$

La solution est donc :

$$S_H = \left\{ Ae^{x} + Be^{-\frac{2}{3}x} / A \in \mathbb{R}, B \in \mathbb{R} \right\}$$

(b) $9y'' + 6y' + y = 0$

Solution :

L'équation caractéristique est :

$$9x^2 + 6x + 1 = 0$$

On trouve $\Delta = 0$. Il y a donc une solution réelle :

$$\begin{cases} x_0 = -\dfrac{1}{3} \end{cases}$$

La solution est donc :

$$S_H = \left\{ (Ax + B)e^{-\frac{1}{3}x} / A \in \mathbb{R}, B \in \mathbb{R} \right\}$$

(c) $y'' + 2y' + 2y = 0$

Solution :

L'équation caractéristique est :

$$x^2 + 2x + 2 = 0$$

On trouve $\Delta = -4$. Il y a donc deux solutions complexes :

$$\begin{cases} z_1 = -1 + i \\ z_2 = -1 - i \end{cases}$$

Donc $\alpha = -1$ et $\beta = 1$.

La solution est donc :

$$S_H = \left\{(A\cos(x) + B\sin(x))\, e^{-x} / A \in \mathbb{R}, B \in \mathbb{R}\right\}$$

(d) $y'' + 16y = 0$

Solution :

L'équation caractéristique est :

$$x^2 + 16 = 0$$

On trouve $\Delta = -64$. Il y a donc deux solutions complexes :

$$\begin{cases} z_1 &= 4i \\ z_2 &= -4i \end{cases}$$

Donc $\alpha = 0$ et $\beta = 4$.

La solution est donc :

$$S_H = \{A\cos(4x) + B\sin(4x) / A \in \mathbb{R}, B \in \mathbb{R}\}$$

2.2 Équation non homogène à coefficients constants :

$$(E) \quad ay'' + by' + cy = u(t)$$

où $a \in \mathbb{R}^*$, $b \in \mathbb{R}$,$c \in \mathbb{R}$ et u une fonction définie sur un intervalle I.

Définition 1 :

On appelle solution particulier (E) , **une** solution définie sur I de l'équation (E)

Exemple 1 :

Pour $(E) \quad y'' - 2y' + 3y = 6e^{2t}$, la fonction définie par $f_0(t) = 2e^{2t}$ est une solution particulière de (E).

Exercice 6 : Pour les différentes équations, montrer que la fonction f_0 donnée est une solution particulière de (E).

(a) $y'' + y' - 5y = 10$ avec $f_0(t) = -2$

(b) $2y'' + 3y' + y = t$ avec $f_0(t) = t - 3$

(c) $y'' - 2y = 2t^2 + 6$ avec $f_0(t) = -t^2 - 4$

(d) $y'' + y' + 3y = 9te^{-t}$ avec $f_0(t) = (3t + 1)e^{-t}$

Propriété 1 :

Les solutions de l'équation non homogène s'obtiennent en ajoutant à une solution particulière les solutions générales de l'équation homogène.

Exemple 2 :

Pour $(E) \quad y'' + 4y' + 4y = 9e^t$, on a pour solution particulière la fonction définie par $f_0(t) = e^t$. De plus les solutions de l'équation homogènes $(E_H) \quad y'' + 4y' + 4y = 0$ sont les fonctions définie par $f(t) = (At + B)e^{-2t}$, avec $A \in \mathbb{R}$ et $B \in \mathbb{R}$.
Donc les solutions de l'équation (E) sont les fonctions définies par $f(t) = (At+B)e^{-2t}+e^t$, où $A \in \mathbb{R}$ et $B \in \mathbb{R}$.

Exercice 7 : On considère l'équation (E) suivante :

$$(E) \quad y'' + 3y' + 2y = 12x + 4$$

1. Résoudre l'équation homogène :

$$(E_H) \quad y'' + 3y' + 2y = 0$$

2. Montrer que la fonction f_0 définie sur $\mathbb{R}$ par $f_0(x) = 6x - 7$ est une solution particulière de (E).

3. En déduire l'ensemble solution de (E).

2.3 Conditions initiales

$$(E) \quad ay'' + by' + cy = u(t)$$

où $a \in \mathbb{R}^*$, $b \in \mathbb{R}$,$c \in \mathbb{R}$ et u une fonction définie sur un intervalle I.

Propriété 2 :

Soient $x_0 \in I$, $y_0 \in \mathbb{R}$ et $y_1 \in \mathbb{R}$.
Il existe une unique solution f de E vérifiant les conditions initiales $f(x_0) = y_0$ et $f'(x_0) = y_1$.

Exemple 3 :

Pour $(E) \quad y'' + 4y' + 4y = 9e^t$, les solutions sont les fonctions définies par :
$f(t) = (At + B)e^{-2t} + e^t$, où A et B décrivent $\mathbb{R}$.
L'unique solution g vérifiant la condition $g(0) = 3$ et $g'(0) = 0$ est la fonction définie par : $g(t) = (3t + 2)e^{-2t} + e^t$.

Exercice 8 : On considère l'équation (E) suivante :

$$(E) \quad 2y'' - 5y' - 3y = 4e^{-t} + 6$$

1. Résoudre l'équation homogène :$(E_H) \quad 2y'' - 5y' - 3y = 0$

2. Montrer que la fonction f_0 définie sur $\mathbb{R}$ par $f_0(t) = e^{-t} - 2$ est une solution particulière de (E).

3. En déduire l'ensemble solution de (E).

4. Déterminer la solution g de E vérifiant les conditions initiales $g(0) = 3$ et $g'(0) = \dfrac{1}{2}$.