Chapitre 2

# Équations différentielles

## 1 Premier ordre

### 1.1 Équation homogène à coefficients constants :

$$(E) \quad ay' + by = 0$$

où $a \in \mathbb{R}$ et $b \in \mathbb{R}$

**Propriété 1 :**

Soit l'équation différentielle homogène de la forme : $(E) \quad ay' + by = 0$ où a et b sont des réels données.

Les solutions sont les fonctions $f$ définies sur $\mathbb{R}$ par : $f(t) = Ce^{-\frac{b}{a}t}$ où $C$ est un réel quelconque.

**Exemple 1 :**

Pour $(E) \quad 5y' - 2y = 0$, les solutions sont les fonctions définies par $f(t) = Ce^{\frac{2}{5}t}$, où $C \in \mathbf{R}$.

Exercice 1 : Résoudre les équations suivantes :

(a) $y' + 7y = 0$

(b) $4y' + 3y = 0$

(c) $y' = 5y$

(d) $y' = -3y$

### 1.2 Équation non homogène à coefficients constants :

$$(E) \quad ay' + by = c(t)$$

où $a \in \mathbb{R}$, $b \in \mathbb{R}$ et $c$ une fonction définie sur un intervalle $I$.

**Définition 1 :**

On appelle solution particulier $(E)$ , **une** solution définie sur $I$ de l'équation $(E)$

**Exemple 2 :**

Pour $(E) \quad y' + y = 3e^{2t}$, la fonction définie par $f_0(t) = e^{2t}$ est une solution particulière de $(E)$.

Exercice 2 : Pour les différentes équations, montrer que la fonction $f_0$ donnée est une solution particulière de $(E)$.

(a) $y' - 3y = 6$ avec $f_0(t) = -2$

(b) $2y' + y = t^2 + 4t - 1$ avec $f_0(t) = t^2 - 1$

(c) $3y' - 2y = t$ avec $f_0(t) = -\frac{1}{2}t - \frac{3}{4}$

(d) $y' + y = e^{-t}$ avec $f_0(t) = (t+2)e^{-t}$

**Propriété 2 :**

Les solutions de l'équation non homogène s'obtiennent en ajoutant à une solution particulière les solutions générales de l'équation homogène.

**Exemple 3 :**

Pour $(E) \quad y' + y = 3e^{2t}$, on a pour solution particulière la fonction définie par $f_0(t) = e^{2t}$.
De plus les solutions de l'équation homogènes $(E_H) \quad y' + y = 0$ sont les fonctions définie par $f(t) = Ce^{-t}$, avec $C \in \mathbb{R}$.
Donc les solutions de l'équation $(E)$ sont les fonctions définies par $f(t) = Ce^{-t} + e^{2t}$, où $C$ décrit $\mathbb{R}$.

Exercice 3 : On considère l'équation $(E)$ suivante :

$$(E) \quad y' - 4y = -4x - 3$$

1. Résoudre l'équation homogène :

$$(E_H) \quad y' - 4y = 0$$

2. Montrer que la fonction $f_0$ définie sur $\mathbb{R}$ par $f_0(x) = x + 1$ est une solution particulière de $(E)$.

3. En déduire l'ensemble solution de $(E)$.

## 1.3 Conditions initiales

$$(E) \quad ay' + by = c(t)$$

où $a \in \mathbb{R}$, $b \in \mathbb{R}$ et $c$ une fonction définie sur un intervalle $I$.

**Propriété 3 :**

Soient $x_0 \in I$, et $y_0 \in \mathbb{R}$.
Il existe une unique solution $f$ de $E$ vérifiant la condition initiale $f(x_0) = y_0$.

**Exemple 4 :**

Pour $(E) \quad y' + y = 3e^{2t}$, les solutions sont les fonctions définies par $f(t) = Ce^{-t} + e^{2t}$, où $C$ décrit $\mathbb{R}$.
L'unique solution $g$ vérifiant la condition $g(0) = 3$ est la fonction définie par $g(t) = 2e^{-t} + e^{2t}$.

Exercice 4 : On considère l'équation $(E)$ suivante :

$$(E) \quad 2y' - y = -x^2 + 4$$

1. Résoudre l'équation homogène :$(E_H) \quad 2y' - y = 0$
2. Montrer que la fonction $f_0$ définie sur $\mathbb{R}$ par $f_0(x) = (x+2)^2$ est une solution particulière de $(E)$.
3. En déduire l'ensemble solution de $(E)$.
4. Déterminer la solution $g$ de $E$ vérifiant la condition initiale $g(0) = 5$.

# 2 Second ordre

## 2.1 Équation homogène à coefficients constants :

$$(E_H) \quad ay'' + by' + cy = 0$$

où $a \in \mathbb{R}^*$ , $b \in \mathbb{R}$ et $c \in \mathbb{R}$

**Propriété 4 :**

On appelle équation caractéristique associée à $(E_H)$ l'équation de la variable $x$ suivante :

$$ax^2 + bx + c = 0$$

On note $\Delta = b^2 - 4ac$. La résolution de l'équation $(E_H)$ est donnée par :

- Si $\Delta > 0$ , alors l'équation caractéristique admet deux solutions données par : $x_1 = \dfrac{-b+\sqrt{\Delta}}{2a}$ et $x_2 = \dfrac{-b-\sqrt{\Delta}}{2a}$. Les solutions de l'équation $(E_H)$ sont les fonctions $f$ définies sur $\mathbb{R}$ par :
$$f(t) = Ae^{x_1 t} + Be^{x_2 t}$$
où $A$ et $B$ sont des réels quelconques.
- Si $\Delta = 0$ , alors l'équation caractéristique admet une seule solution, donnée par : $x_0 = \dfrac{-b}{2a}$. Les solutions de l'équation $(E_H)$ sont les fonctions $f$ définies sur $\mathbb{R}$ par :
$$f(t) = (At + B)e^{x_0 t}$$
où $A$ et $B$ sont des réels quelconques.
- Si $\Delta < 0$ , alors l'équation caractéristique admet deux solutions complexes conjuguées données par : $z_1 = \dfrac{-b+i\sqrt{-\Delta}}{2a}$ et $z_2 = \dfrac{-b-i\sqrt{-\Delta}}{2a}$. On note alors $z_1 = \alpha + i\beta$. Les solutions de l'équation $(E_H)$ sont les fonctions $f$ définies sur $\mathbb{R}$ par :
$$f(t) = (A\cos(\beta t) + B\sin(\beta t))\, e^{\alpha t}$$
où $A$ et $B$ sont des réels quelconques.

**Exemple 5 :**

1. Pour $(E)\quad y'' - y' - 6y = 0$, les solutions sont les fonctions définies par :
   $f(t) = Ae^{3t} + Be^{-2t}$, où $A \in \mathbf{R}$ et $B \in \mathbf{R}$.
2. Pour $(E)\quad y'' - 4y' + 4y = 0$, les solutions sont les fonctions définies par :
   $f(t) = (At + B)e^{2t}$, où $A \in \mathbf{R}$ et $B \in \mathbf{R}$.
3. Pour $(E)\quad y'' - 4y' + 13y = 0$, les solutions sont les fonctions définies par :
   $f(t) = (A\cos(3t) + B\sin(3t))\,e^{2t}$, où $A \in \mathbf{R}$ et $B \in \mathbf{R}$.

Exercice 5 : Résoudre les équations suivantes :

(a) $3y'' - y' - 2y = 0$

(b) $9y'' + 6y' + y = 0$

(c) $y'' + 2y' + 2y = 0$

(d) $y'' + 16y = 0$

## 2.2 Équation non homogène à coefficients constants :

$$(E)\quad ay'' + by' + cy = u(t)$$

où $a \in \mathbb{R}^*$, $b \in \mathbb{R}$ ,$c \in \mathbb{R}$ et $u$ une fonction définie sur un intervalle $I$.

**Définition 2 :**

On appelle solution particulier $(E)$ , **une** solution définie sur $I$ de l'équation $(E)$

**Exemple 6 :**

Pour $(E)\quad y'' - 2y' + 3y = 6e^{2t}$, la fonction définie par $f_0(t) = 2e^{2t}$ est une solution particulière de $(E)$.

Exercice 6 : Pour les différentes équations, montrer que la fonction $f_0$ donnée est une solution particulière de $(E)$.

(a) $y'' + y' - 5y = 10$ avec $f_0(t) = -2$

(b) $2y'' + 3y' + y = t$ avec $f_0(t) = t - 3$

(c) $y'' - 2y = 2t^2 + 6$ avec $f_0(t) = -t^2 - 4$

(d) $y'' + y' + 3y = 9te^{-t}$ avec
$f_0(t) = (3t + 1)e^{-t}$

**Propriété 5 :**

Les solutions de l'équation non homogène s'obtiennent en ajoutant à une solution particulière les solutions générales de l'équation homogène.

**Exemple 7 :**

Pour $(E)\quad y'' + 4y' + 4y = 9e^t$, on a pour solution particulière la fonction définie par $f_0(t) = e^t$. De plus les solutions de l'équation homogènes $(E_H)\quad y'' + 4y' + 4y = 0$ sont les fonctions définie par $f(t) = (At + B)e^{-2t}$, avec $A \in \mathbb{R}$ et $B \in \mathbb{R}$ .
Donc les solutions de l'équation $(E)$ sont les fonctions définies par $f(t) = (At+B)e^{-2t} + e^t$, où $A \in \mathbb{R}$ et $B \in \mathbb{R}$ .

Exercice 7 : On considère l'équation $(E)$ suivante :

$$(E) \quad y'' + 3y' + 2y = 12x + 4$$

1. Résoudre l'équation homogène :

$$(E_H) \quad y'' + 3y' + 2y = 0$$

2. Montrer que la fonction $f_0$ définie sur $\mathbb{R}$ par $f_0(x) = 6x - 7$ est une solution particulière de $(E)$.

3. En déduire l'ensemble solution de $(E)$.

## 2.3 Conditions initiales

$$(E) \quad ay'' + by' + cy = u(t)$$

où $a \in \mathbb{R}^*$, $b \in \mathbb{R}$ ,$c \in \mathbb{R}$ et $u$ une fonction définie sur un intervalle $I$.

**Propriété 6 :**

Soient $x_0 \in I$, $y_0 \in \mathbb{R}$ et $y_1 \in \mathbb{R}$.
Il existe une unique solution $f$ de $E$ vérifiant les conditions initiales $f(x_0) = y_0$ et $f'(x_0) = y_1$ .

**Exemple 8 :**

Pour $(E) \quad y'' + 4y' + 4y = 9e^t$, les solutions sont les fonctions définies par :
$f(t) = (At + B)e^{-2t} + e^t$, où $A$ et $B$ décrivent $\mathbb{R}$.
L'unique solution $g$ vérifiant la condition $g(0) = 3$ et $g'(0) = 0$ est la fonction définie par : $g(t) = (3t + 2)e^{-2t} + e^t$.

Exercice 8 : On considère l'équation $(E)$ suivante :

$$(E) \quad 2y'' - 5y' - 3y = 4e^{-t} + 6$$

1. Résoudre l'équation homogène :$(E_H) \quad 2y'' - 5y' - 3y = 0$

2. Montrer que la fonction $f_0$ définie sur $\mathbb{R}$ par $f_0(t) = e^{-t} - 2$ est une solution particulière de $(E)$.

3. En déduire l'ensemble solution de $(E)$.

4. Déterminer la solution $g$ de $E$ vérifiant les conditions initiales $g(0) = 3$ et $g'(0) = \dfrac{1}{2}$.