Les nombres complexes

1 Définition

Définition 1 :

Il existe un ensemble, noté $\mathbb{C}$,de nombres appelés nombres complexes, tel que :

- $\mathbb{C}$ contient $\mathbb{R}$;
- $\mathbb{C}$ est muni d'une addition et d'une multiplication pour lesquelles les règles de calcul sont les mêmes que dans $\mathbb{R}$;
- Il existe dans $\mathbb{C}$ un nombre non réel, noté i, vérifiant $i^2 = -1$;
- Tout nombre complexe z s'écrit de façon unique sous sa forme algébrique :

$$z = a + ib \text{ où } a \text{ et } b \text{ sont des réels.}$$

Exemple 1 :

- $(2+3i)(5-i) =$...
- $(-1+2i)(2-5i) =$...
- $(4-3i)^2 =$...

Définition 2 :

Pour un nombre complexe z de forme algébrique $z = a + ib$, on a

- Le réel a est appelé partie réelle de z et est noté $\Re(z)$.
- Le réel b est appelé partie imaginaire de z et est noté $\Im(z)$.
- Si $b = 0$ alors $z = a + 0i$ est noté $z = a$ et z est un réel.
- Si $a = 0$ alors $z = 0 + ib$ est noté $z = ib$ et z est appelé imaginaire pur.
- Le complexe $0 + 0i$ noté 0 est à la fois réel et imaginaire pur.

Exemple 2 :

Déterminer la partie réelle et la partie imaginaire des complexes suivants :

- $z = 5 - 3i$...
- $z = -4 + i$...

2 Conjugué d'un nombre complexe

Définition 3 :

Soit z un complexe de forme algébrique $z = a + ib$, a et b réels. On appelle conjugué du complexe z, le complexe noté $\bar{z}$ défini par :

$$\overline{z} = a - ib$$

Exemple 3 :

Déterminer le conjugué des complexes suivants :

- $z = 5 - 3i$..
- $z = -4 + i$..

Propriété 1 :

- $\overline{z} = z \Leftrightarrow z \in \mathbb{R}$.
- $\overline{z} = -z \Leftrightarrow z \in i\mathbb{R}$, où $i\mathbb{R}$ est l'ensemble des imaginaires pures.
- Pour z un complexe de forme algébrique $z = a + ib$, on a :

$$z \times \overline{z} = a^2 + b^2$$

.

Exemple 4 :

Pour z un complexe de forme algébrique $z = 5 - 4i$, on a :
$z \times \overline{z} =$ ....

Exemple 5 :

Méthode pour trouver l'inverse d'un nombre complexe :
Pour $z = 4 - 2i$, déterminer la forme algébrique de :
$\frac{1}{z} =$ ....

Exemple 6 :

Déterminer la forme algébrique de Z :
$Z = \frac{2 - i}{3 + 2i} =$ ....

3 Équation du second degré

Propriété 2 :

On considère le polynôme

$$P(x) = ax^2 + bx + c \text{ (où } a \text{ est un réel non nul)}$$

On note $\Delta = b^2 - 4ac$. La résolution de l'équation $P(x) = 0$ est donnée par :

- Si $\Delta > 0$, alors l'équation admet deux solutions, appelées racines du polynôme, données par : $x_1 = \dfrac{-b + \sqrt{\Delta}}{2a}$ et $x_2 = \dfrac{-b - \sqrt{\Delta}}{2a}$;
- Si $\Delta = 0$, alors l'équation admet une seule solution, appelée racine double du polynôme, donnée par : $x_0 = \dfrac{-b}{2a}$;
- Si $\Delta < 0$, alors l'équation admet deux solutions complexes conjuguées données par : $z_1 = \dfrac{-b + i\sqrt{-\Delta}}{2a}$ et $z_2 = \dfrac{-b - i\sqrt{-\Delta}}{2a}$;

Exemple 7 :

Résoudre dans $\mathbb{C}$ l' équation suivante :

$$(E_1) \quad x^2 - 2x + 5 = 0$$

$\Delta =$ ....

On trouve donc $\Delta < 0$, les solutions sont donc des complexes conjugués :

$z_1 =$ ....

$z_2 =$ ....

La partie réelle commune est : $\alpha =$ ....

La partie imaginaire opposée dans les deux complexes est : $\beta =$ ....