Variables aléatoires

1 Variables aléatoires discrètes

Soit Ω un univers probabilisé.

Définition 1 :

Une variable aléatoire est une fonction qui, à chaque événement élémentaire d'une expérience aléatoire, associe un nombre réel.

Exemple 1 :

Vous jetez deux dés. Pour chaque chiffre supérieur à 3 vous marquez 1 point, pour chaque chiffre 3 vous perdez 2 points. Compléter le tableau des gains :

	1	2	3	4	5	6
1						
2						
3						
4						
5						
6						

On définie ainsi une variable aléatoire X associant le nombre de point obtenus.
Calculer la probabilité des événements suivants :

- A : " gagner un point ".
  ....
  ....
- B : " perdre trois points ".
  ....
  ....
- C : " avoir un score positif ou nul".
  ....
  ....

Définition 2 :

Si X est une variable aléatoire liée à une expérience aléatoire et si k est un nombre réel, $(X = k)$ désigne l'événement contenant tous les événements élémentaires associés au nombre k. La probabilité de cet événement est alors $p(X = k)$.

Exemple 2 :

Ici : $p(X = 1) =$........... , $p(X = -3) =$............. , $p(X \geqslant 0) =$..............

Remarque : si $k \neq k'$ alors $(X = k)$ et $(X = k')$ sont disjoints.

2 Loi de probabilité

Définition 3 :

la loi de probabilité d'une variable X est la fonction qui, à chaque nombre réel k, associe la probabilité de l'événement $(X = k)$.

Exemple 3 :

D'après l'exemple compléter le tableau suivant :

k	-4	-2	-1	0	1	2
$p(X = k)$						

Remarque : Les événements étant deux à deux disjoints et leur réunion étant l'univers tout entier, la somme de leur probabilité est 1.
La loi de probabilité est définie, pour des lois discrètes par le tableau donnant $P(X = k)$ en fonction des différentes valeurs de k.

3 Espérance, variance, écart-type.

Définition 4 :

L'espérance d'une variable aléatoire X (notée $E(X)$)est la moyenne de ses valeurs possibles pondérées par leur probabilité d'apparition :
Si $\{x_1; x_2; ...; x_n\}$ sont les valeurs prises par X, si l'on note $p(X = x_i) = p_i$, on a alors :

$$E(X) = x_1p_1 + ... + x_np_n = \sum_{i=1}^{n} x_ip_i$$

Exemple 4 :

Déterminer l'espérance de l'exemple :
....
....
....

Remarque :

- $min(x_i) \leq E(X) \leq max(x_i)$
- si on additionne (ou retranche) (ou multiplie) toute les valeurs de X par une même constante, il en est de même pour l'espérance.
- si X représente un gain et $E(X) = 0$, on parlera de jeu équitable.

Définition 5 :

On appelle variance de la variable aléatoire X, le nombre noté $V(X)$, le nombre défini avec les mêmes notations par :

$$V(X) = (x_1 - E(X))^2 p_1 + ... + (x_n - E(X))^2 p_n = \sum_{i=1}^{n} (x_i - E(X))^2 p_i$$

On appelle écart-type de la variable X, le nombre noté $\sigma(X)$ défini par :

$$\sigma(X) = \sqrt{V(X)}$$

Propriété 1 :

On préfèrera la formule suivante pour la variance :

$$V(X) = \sum_{i=1}^{n} x_i^2 p_i - E(X)^2 = E(X^2) - E(X)^2$$

Exemple 5 :

Déterminer l'écart-type de l'exemple :
....
....
....

Propriété 2 :

Pour X une variable aléatoire, on définit pour a et b réels, la loi $Z = aX + b$. On a les relations :

$$E(Z) = aE(X) + b$$
$$V(Z) = a^2 V(X)$$