Fonctions de références

1 Fonctions affines :

Définition 1 :

On dira que la fonction f définie sur $\mathbb{R}$ est une fonction affine si il existe deux réels a et b tel que :

$$\forall x \in \mathbb{R} \quad f(x) = ax + b$$

a est appelé coefficient directeur.
b est appelé ordonnée à l'origine.

Exemple 1 :

- La fonction f définie sur $\mathbb{R}$ par $f(x) = 3x + 5$ est une fonction affine, son coefficient directeur est $a = 3$, son ordonnée à l'origine est $b = 5$.
- La fonction g définie sur $\mathbb{R}$ par $g(x) = -x$ est une fonction affine, son coefficient directeur est $a = -1$, son ordonnée à l'origine est $b = 0$.

Exercice 1 : Pour les fonctions suivantes, définies sur $\mathbb{R}$, déterminer le coefficient directeur et l'ordonnée à l'origine des fonctions affines suivantes :

1. $f_1(x) = x + 1 + 2x - 4$
2. $f_2(x) = 2(2x + 5) + 4$
3. $f_3(x) = 3x + 4 - 5(x + 1)$
4. $f_4(x) = 2x + 7 - (2x + 3)$
5. $f_5(x) = x(4x + 1) - (2x + 3)^2$
6. $f_6(x) = (x - 1)^2 - (x + 1)^2$

Solution :

1. On trouve
$$\begin{aligned} f_1(x) &= x + 1 + 2x - 4 \\ &= 3x - 3 \end{aligned}$$
Le coefficient directeur est $a = 3$ et $b = -3$.

2. On trouve
$$\begin{aligned} f_2(x) &= 2(2x + 5) + 4 \\ &= 4x + 14 \end{aligned}$$
Le coefficient directeur est $a = 4$ et $b = 14$.

3. On trouve
$$\begin{aligned} f_3(x) &= 3x + 4 - 5(x + 1) \\ &= -2x - 1 \end{aligned}$$
Le coefficient directeur est $a = -2$ et $b = -1$.

4. On trouve
$$\begin{aligned} f_4(x) &= 2x + 7 - (2x + 3) \\ &= 4 \end{aligned}$$
Le coefficient directeur est $a = 0$ et $b = 4$.

5. On trouve
$$\begin{aligned} f_5(x) &= x(4x + 1) - (2x + 3)^2 \\ &= -11x - 9 \end{aligned}$$
Le coefficient directeur est $a = -11$ et $b = -9$.

6. $f_6(x) = (x-1)^2 - (x+1)^2$ On trouve

$$\begin{aligned} f_6(x) &= (x-1)^2 - (x+1)^2 \\ &= -4x \end{aligned}$$

Le coefficient directeur est $a = -4$ et $b = 0$.

2 Fonctions polynômes :

2.1 Trinôme

Définition 2 :

On dira que la fonction P définie sur $\mathbb{R}$ est un trinôme si elle admettant une écriture polynômiale soit :

$$\exists (a,b,c) \in \mathbb{R}^* \times \mathbb{R} \times \mathbb{R} \text{ tel que } \forall x \in \mathbb{R} \text{ , } P(x) = ax^2 + bx + c$$

Un trinôme est aussi appelé polynôme du second degré.

Exemple 2 :

- La fonction f définie sur $\mathbb{R}$ par $f(x) = 3x^2 - 2x + 5$ est un trinôme, on identifie les coefficients par : $a = 3$, $b = -2$, $c = 5$.
- La fonction g définie sur $\mathbb{R}$ par $g(x) = -x^2 + 2$ est un trinôme, on identifie les coefficients par : $a = -1$, $b = 0$, $c = 2$.
- La fonction h définie sur $\mathbb{R}$ par $h(x) = 8x + 7$ n'est pas un trinôme, il s'agit d'une fonction affine.

Exercice 2 : Pour les fonctions suivantes, définies sur $\mathbb{R}$, déterminer la forme polynomiale et identifier les coefficients a, b et c :

1. $f_1(x) = x(x+1)+2$
2. $f_2(x) = (2x+5)^2$
3. $f_3(x) = (3x+4)(5-x)$
4. $f_4(x) = (2x-3)(2x+3)$
5. $f_5(x) = (4x+1)(x-4)+3(5x+2)-2$
6. $f_6(x) = (x-1)^2+(x+1)^2$

Solution :

1. On trouve
$$\begin{array}{rcl} f_1(x) & = & x(x+1)+2 \\ & = & x^2+x+2 \end{array}$$
Le coefficient directeur est $a=1$, $b=1$ et $c=2$

2. On trouve
$$\begin{array}{rcl} f_2(x) & = & (2x+5)^2 \\ & = & 4x^2+20x+25 \end{array}$$
Le coefficient directeur est $a=4$, $b=20$ et $c=25$

3. On trouve
$$\begin{array}{rcl} f_3(x) & = & (3x+4)(5-x) \\ & = & -3x^2+11x+20 \end{array}$$
Le coefficient directeur est $a=-3$, $b=11$ et $c=20$

4. On trouve
$$\begin{array}{rcl} f_4(x) & = & (2x-3)(2x+3) \\ & = & 4x^2-9 \end{array}$$
Le coefficient directeur est $a=4$, $b=0$ et $c=-9$

5. On trouve
$$\begin{array}{rcl} f_5(x) & = & (4x+1)(x-4)+3(5x+2)-2 \\ & = & 4x^2 \end{array}$$
Le coefficient directeur est $a=4$, $b=0$ et $c=0$

6. On trouve
$$\begin{array}{rcl} f_5(x) & = & (x-1)^2+(x+1)^2 \\ & = & 2x^2+2 \end{array}$$
Le coefficient directeur est $a=2$, $b=0$ et $c=2$

2.2 Équation du second degré :

Propriété 1 :

On considère le polynôme

$$P(x) = ax^2+bx+c \text{ (où } a \text{ est un réel non nul)}$$

On note $\Delta = b^2-4ac$. La résolution de l'équation $P(x)=0$ est donné par :

- Si $\Delta > 0$, alors l'équation admet deux solutions, appelées racines du polynôme, données par : $x_1 = \dfrac{-b+\sqrt{\Delta}}{2a}$ et $x_2 = \dfrac{-b-\sqrt{\Delta}}{2a}$;

- Si $\Delta = 0$, alors l'équation admet une seule solution, appelée racine double du polynôme, donnée par : $x_0 = -\dfrac{b}{2a}$;
- Si $\Delta < 0$, alors l'équation n'admet aucune solution réelle.

Exercice 3 : Déterminer les racines éventuelles des polynômes suivants :

1. $f_1(x) = x^2 - 5x + 6$
2. $f_2(x) = x^2 - \dfrac{10}{3}x + 1$
3. $f_3(x) = 2x^2 - 2x + 9$
4. $f_4(x) = 5x^2 + 3x - 2$
5. $f_5(x) = -4x^2 + 4x - 1$
6. $f_6(x) = -9x^2 + 1$

Solution :

1. $f_1(x) = x^2 - 5x + 6$
   On a $\Delta = (-5)^2 - 4 \times 1 \times 6 = 1$
   On a $\Delta > 0$,donc le polynôme admet donc deux racines réelles :
   $$\begin{cases} x_1 = \dfrac{5+1}{2} = 3 \\ x_2 = \dfrac{3-1}{2} = 2 \end{cases}$$
   D'où $\boxed{S = \{3; 2\}}$

2. $f_2(x) = x^2 - \dfrac{10}{3}x + 1$
   On a $\Delta = \left(-\dfrac{10}{3}\right)^2 - 4 \times 1 \times 1 = \dfrac{64}{9}$
   On a $\Delta > 0$,donc le polynôme admet donc deux racines réelles :
   $$\begin{cases} x_1 = \dfrac{\frac{10}{3} + \frac{8}{3}}{2} = 3 \\ x_2 = \dfrac{\frac{10}{3} - \frac{8}{3}}{2} = \dfrac{1}{3} \end{cases}$$
   D'où $\boxed{S = \left\{3; \dfrac{1}{3}\right\}}$

3. $f_3(x) = 2x^2 - 2x + 9$
   On a $\Delta = (-2)^2 - 4 \times 2 \times 9 = -68$
   On a $\Delta > 0$,donc le polynôme n'admet pas de racine réelle :
   D'où $\boxed{S = \varnothing}$

4. $f_4(x) = 5x^2 + 3x - 2$ On a $\Delta = 3^2 - 4 \times 5 \times (-2) = 49$
   On a $\Delta > 0$,donc le polynôme admet donc deux racines réelles :
   $$\begin{cases} x_1 = \dfrac{-3+7}{10} = \dfrac{2}{5} \\ x_2 = \dfrac{-3-7}{10} = -1 \end{cases}$$
   D'où $\boxed{S = \left\{\dfrac{2}{5}; -1\right\}}$

5. $f_5(x) = -4x^2 + 4x - 1$ On a $\Delta = 4^2 - 4 \times (-4) \times (-1) = 0$
   On a $\Delta = 0$,donc le polynôme admet donc une seule racine réelle :
   $x_1 = \dfrac{-4}{-8} = \dfrac{1}{2}$ D'où $\boxed{S = \left\{\dfrac{1}{2}\right\}}$

6. $f_6(x) = -9x^2 + 1$ On a $\Delta = 0^2 - 4 \times (-9) \times 1 = 36$
   On a $\Delta > 0$,donc le polynôme admet donc deux racines réelles :
   $$\begin{cases} x_1 = \dfrac{-0+6}{-18} = -\dfrac{1}{3} \\ x_2 = \dfrac{-0-6}{-18} = \dfrac{1}{3} \end{cases}$$
   D'où $\boxed{S = \left\{-\dfrac{1}{3}; \dfrac{1}{3}\right\}}$

2.3 Signe d'un trinôme :

Propriété 2 :

On considère le polynôme $P(x) = ax^2 + bx + c$ (où a est un réel non nul).
On note $\Delta = b^2 - 4ac$:

- Si $\Delta > 0$, alors $P(x)$ est du signe de a "à l'extérieur des racines" :

  Par exemple, si $a > 0$ et $x_1 < x_2$ on a :

  $\forall x \in]-\infty; x_1[\bigcup]x_2; -\infty[\,, P(x) > 0$
- Si $\Delta = 0$, alors le trinôme est du signe de a, en s'annulant en x_0.
- Si $\Delta < 0$, alors le trinôme est strictement du signe de a.

Exercice 4 : Déterminer le tableau de signe des polynômes suivants :

1. $f_1(x) = -x^2 - 6$
2. $f_2(x) = 2x^2 + 4x - 30$
3. $f_3(x) = 5x^2 - 3x$
4. $f_4(x) = 6x^2 - 5x + 1$
5. $f_5(x) = \dfrac{1}{2}x^2 + 2x + 2$
6. $f_6(x) = -25x^2 + 9$

Solution :

1. $f_1(x) = -x^2 - 6$
   On a $\Delta = b^2 - 4ac = 0^2 - 4 \times (-1) \times (-6) = -24$
   Donc le polynôme n'admet pas de racine :
   On obtient donc le tableau de signe :

x	$-\infty$		$+\infty$
$-x^2 - 6$		$-$	

2. $f_2(x) = 2x^2 + 4x - 30$
   On a $\Delta = b^2 - 4ac = 4^2 - 4 \times 2 \times (-30) = 256$
   Donc le polynôme admet deux racines :
   $$\begin{cases} x_1 = \dfrac{-b + \sqrt{\Delta}}{2a} = \dfrac{-4 + 16}{4} = 3 \\ x_2 = \dfrac{-b - \sqrt{\Delta}}{2a} = \dfrac{-4 - 16}{4} = -5 \end{cases}$$
   On obtient donc le tableau de signe :

x	$-\infty$		-5		3		$+\infty$
$f_2(x)$		$+$	0	$-$	0	$+$	

3. $f_3(x) = 5x^2 - 3x$
   On a $\Delta = b^2 - 4ac = (-3)^2 - 4 \times 5 \times 0 = 9$
   Donc le polynôme admet deux racines :
   $$\begin{cases} x_1 = \dfrac{-b + \sqrt{\Delta}}{2a} = \dfrac{3 + 3}{10} = \dfrac{3}{5} \\ x_2 = \dfrac{-b - \sqrt{\Delta}}{2a} = \dfrac{3 - 3}{10} = 0 \end{cases}$$
   On obtient donc le tableau de signe :

x	$-\infty$		0		$\frac{3}{5}$		$+\infty$
$f_3(x)$		$+$	0	$-$	0	$+$	

4. $f_4(x) = 6x^2 - 5x + 1$
   On a $\Delta = b^2 - 4ac = (-5)^2 - 4 \times 6 \times 1 = 1$

Donc le polynôme admet deux racines :

$$\begin{cases} x_1 = \dfrac{-b+\sqrt{\Delta}}{2a} = \dfrac{5+1}{12} = \dfrac{1}{2} \\ x_2 = \dfrac{-b-\sqrt{\Delta}}{2a} = \dfrac{5-1}{12} = \dfrac{1}{3} \end{cases}$$

On obtient donc le tableau de signe :

x	$-\infty$		$\frac{1}{3}$		$\frac{1}{2}$		$+\infty$
$f_4(x)$		$+$	0	$-$	0	$+$	

5. $f_5(x) = \frac{1}{2}x^2 + 2x + 2$

   On a $\Delta = b^2 - 4ac = 2^2 - 4 \times \frac{1}{2} \times 2 = 0$

   Donc le polynôme admet une unique racines :

   $x_0 = \dfrac{-b}{2a} = \dfrac{-2}{1} = -2$

   On obtient donc le tableau de signe :

x	$-\infty$		$\frac{1}{2}$		$+\infty$
$f_5(x)$		$+$	0	$+$	

6. $f_6(x) = -25x^2 + 9$

   On a $\Delta = b^2 - 4ac = 0^2 - 4 \times (-25) \times 9 = 900$

   Donc le polynôme admet deux racines :

$$\begin{cases} x_1 = \dfrac{-b+\sqrt{\Delta}}{2a} = \dfrac{0+30}{-50} = -\dfrac{3}{5} \\ x_2 = \dfrac{-b-\sqrt{\Delta}}{2a} = \dfrac{0-30}{-50} = \dfrac{3}{5} \end{cases}$$

   On obtient donc le tableau de signe :

x	$-\infty$		$-\frac{3}{5}$		$\frac{3}{5}$		$+\infty$
$f_3(x)$		$-$	0	$+$	0	$-$	

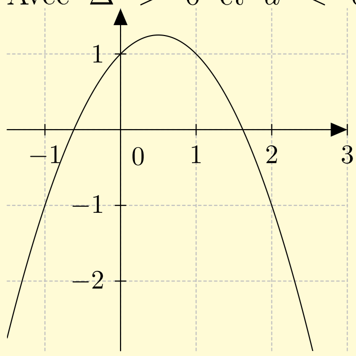
2.4 La parabole :

Définition 3 :

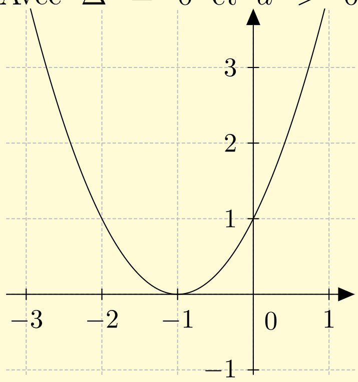
La représentation graphique d'un trinôme est appelée une parabole.

Exemple 3 :

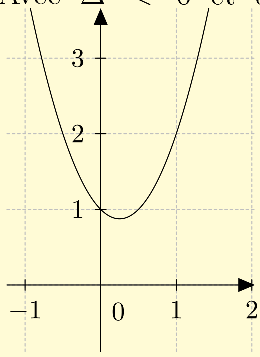
Avec $\Delta > 0$ et $a < 0$:



Avec $\Delta = 0$ et $a > 0$:

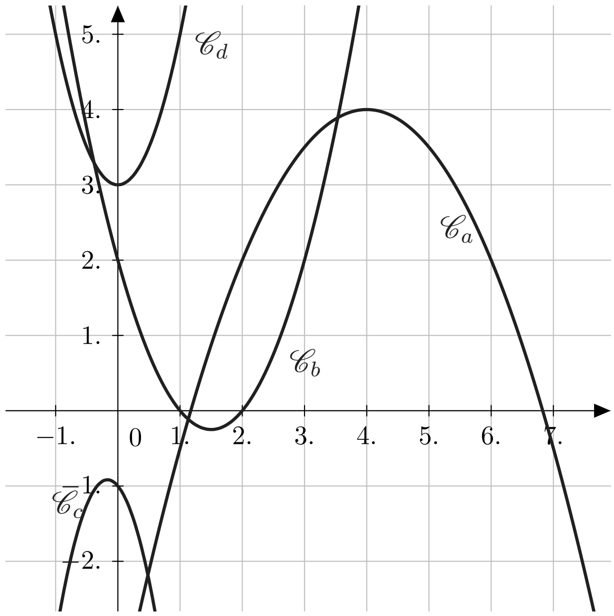


Avec $\Delta < 0$ et $a > 0$:



Exercice 5 : Associer les fonctions à leur courbe :

1. $f_1(x) = 2x^2 + 3$
2. $f_2(x) = x^2 - 3x + 2$
3. $f_3(x) = -\dfrac{1}{2}x^2 + 4x - 4$
4. $f_4(x) = -3x^2 - x - 1$



3 Fonction racine carrée

Définition 4 :

Soit a un réel positif. On appelle racine carré de a, noté $\sqrt{a}$, l'unique nombre réel positif ayant pour carré a :

$$\forall a \in \mathbb{R}^+ \quad \left(\sqrt{a}\right)^2 = a$$

Exemple 4 :

- $\sqrt{25} = 5$, car $5^2 = 25$.
- $\sqrt{49} = 7$, car $7^2 = 49$.

Propriété 3 :

- $\forall a \in \mathbb{R}^+$, $\sqrt{a^2} = a$.
- $\forall a \in \mathbb{R}^+$ et $\forall b \in \mathbb{R}^+$, $\sqrt{a \times b} = \sqrt{a} \times \sqrt{b}$.
- $\forall a \in \mathbb{R}^+$ et $\forall b \in \mathbb{R}^+$, $\sqrt{\dfrac{a}{b}} = \dfrac{\sqrt{a}}{\sqrt{b}}$.

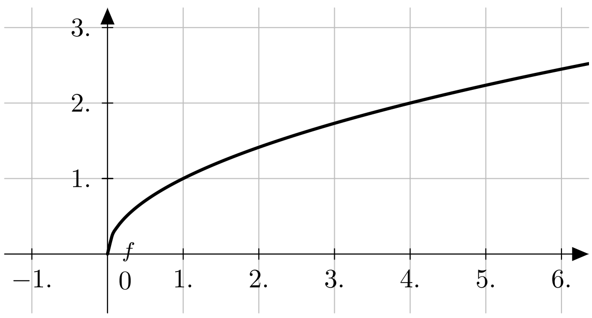
Exercice 6 : Simplifier les radicaux suivants :

1. $A = \sqrt{75}$
2. $B = \sqrt{20}$
3. $C = \sqrt{8}$
4. $D = \sqrt{\dfrac{162}{125}}$

Définition 5 :

La fonction racine carré est la fonction définie sur $\mathbb{R}^+$, qui à tout x de $\mathbb{R}^+$, associe $\sqrt{x}$:

$$\sqrt{\cdot} : \begin{array}{ccc} \mathbb{R}^+ & \longrightarrow & \mathbb{R}^+ \\ x & \longmapsto & \sqrt{x} \end{array}$$



4 Logarithme népérien

4.1 Définition :

Définition 6 :

On appelle logarithme népérien, noté ln, l'unique fonction définie sur $\mathbb{R}^{+*}$ vérifiant les hypothèses suivantes :

- $\ln(1) = 0$.
- $\forall a \in \mathbb{R}^{+*}$, $\forall b \in \mathbb{R}^{+*}$, $\ln(a \times b) = \ln(a) + \ln(b)$.

Exemple 5 :

$\ln(15) = \ln(3 \times 5) = \ln(3) + \ln(5)$

Propriété 4 :

- $\forall a \in \mathbb{R}^{+*}$, $\forall b \in \mathbb{R}^{+*}$, $\ln\left(\frac{a}{b}\right) = \ln(a) - \ln(b)$.
- $\forall a \in \mathbb{R}^{+*}$, $\ln\left(\frac{1}{a}\right) = -\ln(a)$.
- $\forall a \in \mathbb{R}^{+*}$, $\forall n \in \mathbb{N}$, $\ln(a^n) = n\ln(a)$.
- $\forall a \in \mathbb{R}^{+*}$, $\ln(\sqrt{a}) = \frac{1}{2}\ln(a)$.

Exercice 7 : Écrire les nombres suivants à l'aide de ln(2) et ln(3) :

1. $A = \ln(12)$
2. $B = \ln(72)$
3. $C = \ln\left(\frac{1}{8}\right)$
4. $D = \ln\left(\frac{16}{81}\right)$

Propriété 5 :

Il existe un nombre positif noté e vérifiant :

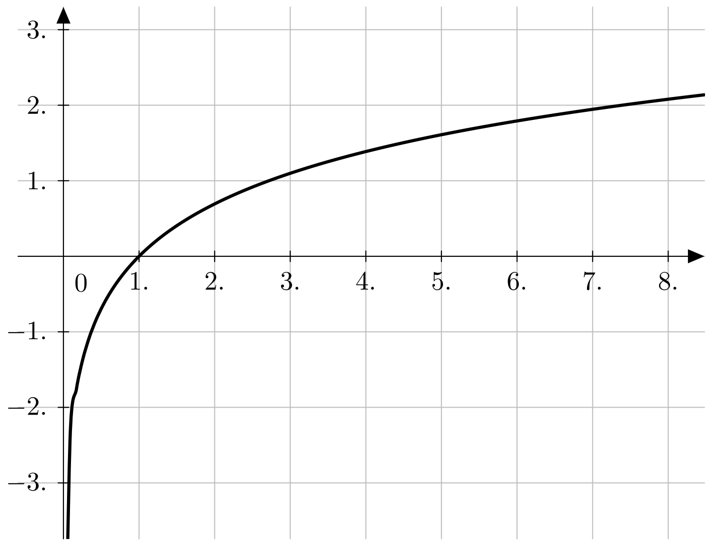
$$\ln(e) = 1$$

Un valeur approchée de e est : $e = 2,72$ à 10^{-2} près.

Exemple 6 :

On a donc $\ln(e^5) = 5\ln(e) = 5 \times 1 = 5$

4.2 Courbe :



Propriété 6 :

$$\ln(x) < 0 \Leftrightarrow 0 < x < 1$$

$$\ln(x) > 0 \Leftrightarrow x > 1$$

4.3 Équations :

Propriété 7 :

$$\forall x > 0 \quad \forall a > 0 \quad \ln(x) = \ln(a) \Leftrightarrow x = a$$

Exemple 7 :

$\ln(x) = \ln(5) \Leftrightarrow x = 5$

Exercice 8 : Résoudre dans $\mathbb{R}^{+*}$:

1. $\ln(x) = \ln(2)$
2. $\ln(3x) = \ln(5)$
3. $\ln(2x) = 0$
4. $\ln(5x) = 1$

Exercice 9 : Résoudre dans $]3; +\infty[$:

$$\ln(2x - 6) = \ln(1 + 7x)$$

5 Fonction exponentielle

5.1 Définition :

Définition 7 :

La fonction exponentielle, notée exp, est la fonction définie sur $\mathbb{R}$ par $\exp(x) = e^x$, e^x étant l'unique nombre réel strictement positif dont le logarithme népérien est x.

Propriété 8 :

- Pour tout réel x, $e^x > 0$.
- $e^1 = e$
- $e^0 = 1$
- Pour tout réel x, $\ln(e^x) = x$.
- Pour tout réel $x > 0$, $e^{\ln x} = x$.
- Pour tout réel x et tout réel $y > 0$:

$$y = e^x \Leftrightarrow \ln(y) = x$$

Exemple 8 :

- $e^{-5} > 0$.
- $\ln(e^7) = 7$.
- $e^{\ln 3} = 3$.

Exercice 10 : Résoudre dans $\mathbb{R}$ les équations suivantes :

1. $e^x = 5$
2. $e^x = -3$
3. $e^{2x} = 7$
4. $e^{3+x} = 1$

5.2 Propriétés algébriques

Propriété 9 :

- $\forall a \in \mathbb{R}$, $\forall b \in \mathbb{R}$, $e^{a+b} = e^a \times e^b$.
- $\forall a \in \mathbb{R}$, $\forall b \in \mathbb{R}$, $e^{a-b} = \dfrac{e^a}{e^b}$.
- $\forall a \in \mathbb{R}$, $e^{-a} = \dfrac{1}{e^a}$.
- $\forall a \in \mathbb{R}$, $\forall b \in \mathbb{R}$, $(e^a)^b = e^{ab}$.
- $\forall a \in \mathbb{R}$, $\sqrt{e^a} = e^{\frac{a}{2}}$.

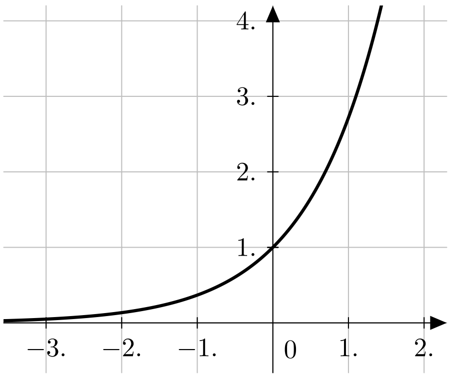
Exemple 9 :

- $e^5 \times e^3 = e^8$
- $\dfrac{e^3}{e^7} = e^{-4}$
- $\dfrac{1}{e^5} = e^{-5}$
- $(e^3)^5 = e^{15}$
- $\sqrt{e^8} = e^4$

Exercice 11 : Simplifier les expressions suivantes :

1. $A = e^8 \times e^{-3}$
2. $B = \dfrac{e^6}{e^2}$
3. $C = (e^5)^4$
4. $D = \dfrac{e^5 \times e^7}{e^{-2} \times e}$

5.3 Courbe :



Propriété 10 :

$$e^x < 1 \Leftrightarrow x < 0$$

$$e^x > 1 \Leftrightarrow x > 0$$

5.4 Équations :

Propriété 11 :

$$\forall x \in \mathbb{R} \quad \forall a \in \mathbb{R} \quad e^x = e^a \Leftrightarrow x = a$$

$$\forall x \in \mathbb{R} \quad \forall a \in \mathbb{R}^{+*} \quad e^x = a \Leftrightarrow x = \ln(a)$$

Exemple 10 :

$e^x = e^3 \Leftrightarrow x = 3$
$e^x = 5 \Leftrightarrow x = \ln(5)$

Exercice 12 : Résoudre dans $\mathbb{R}$ les équations suivantes :

1. $e^x = e^9$
2. $e^{2x+3} = -3$
3. $e^{2x+3} = e^{5-7x}$
4. $e^{3x-2} = 5$