Variables aléatoires discrètes

Exercice 1 : On considère l'expérience aléatoire suivante :
Une première urne contient cinq boules numérotées 0, 2, 4, 6, 8.
Une deuxième urne contient cinq boules numérotées 1, 2, 3, 4, 5.
On appelle "partie" le fait de tirer au hasard une boule de la première urne, puis une boule de la deuxième. Une partie a donc 25 résultats possibles supposés équiprobables.

1. a Compléter le tableau donnant la somme des deux nombres obtenus pour chacun des résultats possibles.

+	0	2	4	6	8
1					
2					
3					
4					
5					

   b Quelle est la probabilité d'obtenir pour une partie une somme égale à 7 ?

   c Quelle est la probabilité d'obtenir pour une partie une somme paire ?

   d Quelle est la probabilité d'obtenir pour une partie une somme au plus égale à 6 ?

2. On considère le jeu suivant associé à chaque partie. Un joueur gagne :
   10 € si la somme est paire,
   30 € si la somme est 1, 3, ou 5,
   et ne gagne rien dans les autres cas.
   On appelle X la variable aléatoire qui à chaque partie associe son gain en euros.

   a Calculer la probabilité de gagner 30 €.

   b Donner sous forme de tableau la loi de probabilité de la variable aléatoire X.

   c Calculer l'espérance mathématique de la variable aléatoire X.

   d L'organisateur demande 6 € pour obtenir le droit de jouer. Ce jeu est-il équitable ?

Exercice 2 : On joue au jeu de " pile ou face " avec trois pièces : une de 0.5 €, une de 1 € et l'autre de 2 €.
Une partie consiste à lancer simultanément les 3 pièces. On notera les résultats par des triplets (exemple : on notera (P,P,F) le fait d'obtenir le résultats :

- pile pour la pièce de 0,5 €.
- pile pour la pièce de 1 €.
- face pour la pièce de 2 €

1. A l'aide d'un arbre, écrire tous les événements élémentaires possibles.

2. Calculer les probabilités des événements suivants :
   - A : " Face apparaît deux fois de suite exactement. "
   - B : " Face apparaît deux fois exactement. "
   - C : " Face apparaît au moins deux fois. "
   - D : " Face apparaît deux fois au plus. "

3. On considère le jeu suivant : si pile apparaît, on gagne le montant de la valeur de la pièce et si c'est face, on le perd.
   On appelle X la variable aléatoire qui à chaque partie associe son gain en euros.
   (a) Donner sous forme de tableau la loi de probabilité de la variable aléatoire X.
   (b) Calculer l'espérance mathématique de la variable aléatoire X. Conclure.

<u>Exercice 3 :</u> Une loterie comporte 20 billets dont 2 gagnants, l'un pour un lot de 100 € , l'autre pour un lot de 60 €. On achète trois billets.

1. Calculer les probabilités suivantes en supposant tous les tirages équiprobables :
   - A : "gagner les 2 lots".
   - B : "gagner le lot de 100 € seulement".
   - C : "gagner le lot de 60 € seulement ".
   - D : "ne rien gagner ".
2. Déterminer la loi de probabilité de la variable aléatoire X qui à tout ensemble de trois billets associe la somme gagnée.
3. Calculer l'espérance $E(X)$.
4. Le prix de vente du billet étant fixé à $\frac{E(X)}{3}$, vérifier que la vente des vingt billets permet d'obtenir la somme mise en jeu.

<u>Exercice 4 :</u> Le coût de production d'un objet est de 950 €. Cet objet peut présenter un défaut A, un défaut B, ou bien en même temps le défaut A et le défaut B. La garantie permet de faire des réparations aux frais du fabricant avec les coûts suivants :
100 € pour le défaut A et 150 € pour le défaut B. On admet que 90% des objets produits n'ont aucun défaut, 5% ont au moins le défaut A, et 4% ont les deux défauts A et B.

1. Déterminer la proportion des objets ayant au moins le défaut B.
2. On note X la variable aléatoire qui, à chaque objet choisi au hasard, associe son prix de revient réel. Déterminer la loi de probabilité de X.
3. Calculer l'espérance mathématique $E(X)$ de cette variable aléatoire. Interpréter le résultat.
4. On admet que tous les objets produits sont vendus.
   (a) L'usine peut-elle espérer réaliser des bénéfices en vendant 960 euros chaque objet vendu ?
   (b) L'usine veut réaliser un bénéfice moyen de 100 € par objet. Expliquer comment doit-on alors choisir le prix de vente de l'objet produit.