Probabilités conditionnelles

1 Conditionnement par un événement de probabilité non nulle

Soit P une probabilité définie sur un univers Ω , et soit A un événement de Ω tel que $P(A) \neq 0$.

Définition 1 :

Pour tout événement B de Ω , on appelle probabilité de B sachant A le réel noté $P_A(B)$ tel que :

$$P_A(B) = \frac{P(A \cap B)}{P(A)}$$

Exemple 1 :

Une société de location de véhicules possède un parc de 800 véhicules de trois marques différentes A, B et C. Dans chacune des marques, la société possède deux modèles de véhicules : "Essence" ou "Diesel".

Nombre de véhicules	Marque A	Marque B	Marque C	Total
Diesel	300	100	100	500
Essence	80	60	160	300
Total	380	160	260	800

On choisit une voiture au hasard dans le parc automobile.
On note :

- A l'évènement : "La voiture est de marque A ".
- B l'évènement : "La voiture est de marque B ".
- C l'évènement : "La voiture est de marque C ".
- D l'évènement : "La voiture a une motorisation diesel ".
- E l'évènement : "La voiture a une motorisation essence ".

Déterminer la probabilité de la voiture soit de marque A, sachant qu'elle est diesel.
.....
.....
.....
.....

Déterminer la probabilité de la voiture soit de essence, sachant qu'elle est de marque B.
.....
.....
.....
.....

Propriété 1 :

P_A est une nouvelle probabilité définie sur Ω , appelée probabilité conditionnelle sachant A . On a donc :

- $P_A(A) = 1$
- Pour tout évènement B , on a : $P_A(\bar{B}) = 1 - P_A(B)$.
- Si A et B sont disjoints, $P_A(B) = 0$.
- Pour tous évènements A et B , non vide, on a :

$$P(A \cap B) = P(A) \times P_A(B) = P(B) \times P_B(A)$$

2 Indépendance de deux évènements

Définition 2 :

Pour A et B , deux évènements d'un univers Ω , on dira que A et B sont indépendants si :

$$P(A \cap B) = P(A) \times P(B)$$

Propriété 2 :

Pour A et B , deux évènements non vides indépendants, on a :

$$P_A(B) = P(B) \text{ et } P_B(A) = P(A)$$

Exemple 2 :

Les évènements B et D sont-ils indépendants ?

.....

.....

.....

.....

Les évènements A et E sont-ils indépendants ?

.....

.....

.....

.....