Probabilités

1 Vocabulaire

Définition 1 :

On appelle expérience aléatoire une expérience où seul le hasard intervient.
Les différents résultats d'une expérience aléatoire s'appellent des éventualités.
L'ensemble des éventualités s'appelle l'univers, on le note Ω.
Un événement est une partie (ou un sous-ensemble) de l'univers.
On dit que cet événement est réalisé si l'une des éventualités qui le compose est réalisée.
Ω s'appelle l'événement certain
$\varnothing$ s'appelle l'événement impossible
Un événement est dit élémentaire s'il contient une seule éventualité

Exemple 1 :

On lance un dé à six faces.
Les éventualités sont :..
L'univers est $\Omega =$..
Exemple d'un évènement : ....
Exemple d'un évènement élémentaire : ....

2 Évènement contraire

Définition 2 :

Soit Ω un univers fini et A un évènement de Ω.
On appelle événement contraire de l'évènement A, noté $\bar{A}$, l'ensemble des éléments de Ω n'étant pas dans A.

Exemple 2 :

On lance un dé à six faces.
Pour $A =$"obtenir un nombre inférieur ou égal à 2"
$\bar{A} =$..

3 Union de deux évènements

Définition 3 :

Soit Ω un univers fini et A et B deux évènements de Ω.
On appelle réunion, ou union, l'évènement A et B, noté $A \cup B$, l'ensemble des éléments de Ω appartenant à A ou à B.

Exemple 3 :

On lance un dé à six faces.
Pour $A =$"obtenir un nombre inférieur ou égal à 2"
Pour $B =$"obtenir un nombre paire"
$A \cup B =$..

4 Intersection de deux évènements

Définition 4 :

Soit Ω un univers fini et A et B deux évènements de Ω.
On appelle intersection des évènements A et B, noté $A \cap B$, l'ensemble des éléments de Ω appartenant à A et à B.

Exemple 4 :

On lance un dé à six faces.
Pour $A =$"obtenir un nombre inférieur ou égal à 2"
Pour $B =$"obtenir un nombre paire"
$A \cap B =$..

5 Événements disjoints

Définition 5 :

Soit Ω un univers fini et A et B deux évènements de Ω.
On dira que A et B sont disjoints (ou incompatibles) si leur intersection est vide :

$$A \cap B = \varnothing$$

Exemple 5 :

On lance un dé à six faces.
Pour $A =$"obtenir un nombre inférieur ou égal à 2"
Déterminer un évènement B tel que A et B soit disjoint :
$B =$..

6 Probabilité d'un évènement

Définition 6 :

Soit Ω un univers fini. On définit une probabilité P en associant à chaque évènement un nombre compris entre 0 et 1 tel que :

- $P(\Omega) = 1$.
- $P(A \cup B) = P(A) + P(B)$ pour des évènements A et B disjoints.

Propriété 1 :

Pour P une probabilité sur un univers Ω :

- $P(\varnothing) = 0$.
- Pour A un évènement quelconque : $0 \leqslant P(A) \leqslant 1$.
- La probabilité de l'événement A est la somme des probabilités des événements élémentaires qui le composent : Si $A = \{a_1; a_2; ...; a_n\}$

$$P(A) = \sum_{i=1}^{n} P(\{a_i\})$$

Exemple 6 :

On lance un dé à six faces.
On suppose que chaque face à la même probabilité d'apparaitre, alors pour A ="obtenir un nombre inférieur ou égal à 2" on a :
$P(A) =$..

Exemple 7 :

On lance un dé à six faces truqué.
On suppose que l'on a :

- $P(\{1\}) = \dfrac{1}{12}$
- $P(\{2\}) = P(\{3\}) = P(\{4\}) = P(\{5\}) = \dfrac{1}{8}$.
- $P(\{6\}) = \dfrac{5}{12}$

Déterminer la probabilité de l'événement B="le nombre est paire" :
$P(B) =$..

7 Équiprobabilité

Définition 7 :

Lorsque chaque événement élémentaire a la même probabilité, on dit qu'il y a équiprobabilité ou que les événements élémentaires sont équiprobables.

Expressions qui signifient qu'il y a équiprobabilité : On tire au hasard une carte dans un jeu... On lance une pièce parfaitement équilibrée... On jette un dé non pipé... Les jetons ou les boules sont indiscernables au toucher...

Propriété 2 :

On se place dans un univers Ω équiprobable. Si le nombre d'évènements élémentaires en n, alors la probabilité de chaque évènement élémentaire en $\frac{1}{n}$.
Pour tout évènement A, on a :

$$P(A) = \frac{\text{nombre de cas favorables}}{\text{nombre de cas possibles}} = \frac{\text{nombre d'éléments de A}}{\text{nombre d'élément de } \Omega}$$

Exemple 8 :

On lance un dé à six faces.
On suppose que chaque face à la même probabilité d'apparaitre, alors pour $A =$"obtenir un nombre inférieur ou égal à 2" on a :
$P(A) =$..

Propriété 3 :

On se place dans un univers Ω équiprobable. A et B deux évènements.

- $P(\bar{A}) = 1 - P(A)$.
- $P(A \cup B) = P(A) + P(B) - P(A \cap B)$
- $P(A \cup B) = P(A) + P(B)$ dans le cas où A et B sont disjoints.

Exemple 9 :

On lance un dé à six faces.
Pour $A =$"obtenir un nombre inférieur ou égal à 2"
Pour $B =$"obtenir un nombre paire"
$P(A \cup B) =$..