Intégrales

Dans tout le chapitre, f désigne une fonction définie sur un intervalle D_f, et on note $\mathscr{C}$ sa courbe représentative dans un repère orthonormé.

I Définition

Définition 1 :

Soit f une fonction définie sur un intervalle $D_f = [a, b]$, et F une primitive de f sur D_f. On appelle intégrale de a à b de f le nombre réel $F(b) - F(a)$, on note :

$$\int_a^b f(t)\,\mathrm{d}t = [F(t)]_a^b = F(b) - F(a)$$

Exemple 1 :

Pour $f(x) = x^2 - 4x + 5$ sur $[2, 4]$, on a $F(x) = \frac{1}{3}x^3 - 2x^2 + 5x$, et ainsi :

$\int_2^4 (t^2 - 4t + 5)\,\mathrm{d}t = \left[\frac{1}{3}t^3 - 2t^2 + 5t\right]_2^4 = \underbrace{\left(\frac{1}{3}4^3 - 2\times 4^2 + 5\times 4\right)}_{F(4)} - \underbrace{\left(\frac{1}{3}2^3 - 2\times 2^2 + 5\times 2\right)}_{F(2)}$

$= \frac{28}{3} - \frac{14}{3} = \frac{14}{3}$

Exercice 1 : Déterminer la valeur des intégrales suivantes :

(a) $\displaystyle\int_{-1}^3 5x^2 - 3\,\mathrm{d}x$

(b) $\displaystyle\int_1^e \frac{1}{x}\,\mathrm{d}x$

Propriété 1 :

Pour f une fonction continue sur D_f, on définit la primitive de f qui s'annule en $a \in D_f$ par :

$$\forall x \in I, F(x) = \int_a^x f(t)\,\mathrm{d}t$$

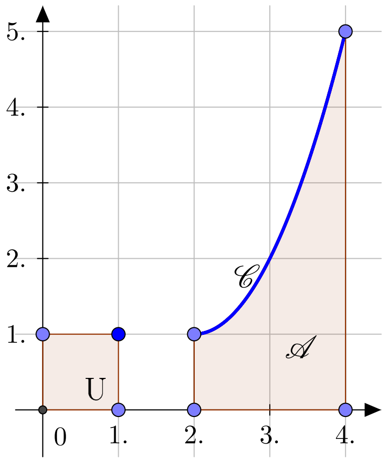
II Interprétation géométrique

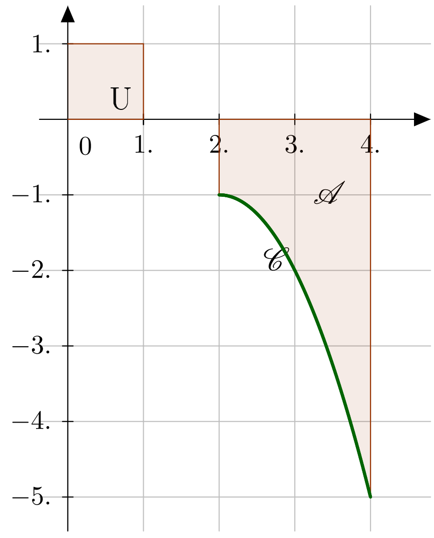
Propriété 2 :

Pour f une fonction continue et positive sur D_f, en notant $I = \int_a^b f(t)\,\mathrm{d}t$. La valeur $\mathscr{A}$ de l'aire, en unité d'aire, de la surface délimitée par les droites d'équations $x = a$, $x = b$, l'axe des abscisses et la courbe $\mathscr{C}$ est égale à I :

$$\mathscr{A} = \int_a^b f(t)\,\mathrm{d}t\ \mathrm{U}$$

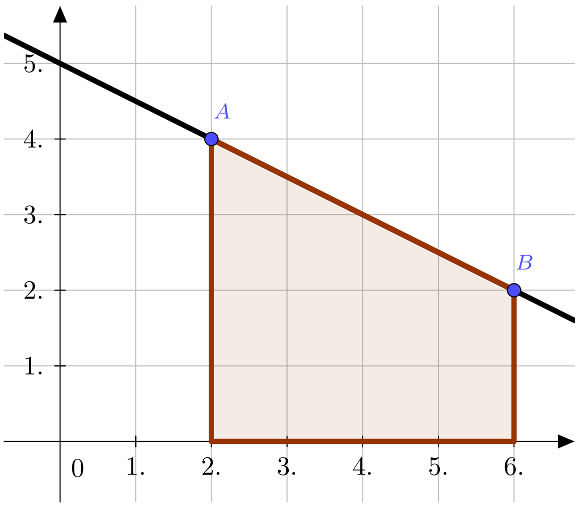
où U est l'unité d'aire du repère.



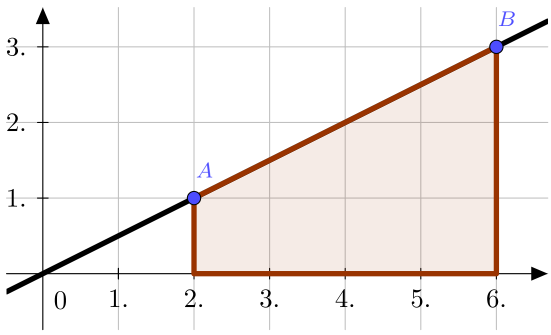


Exercice 2 : Déterminer, en utilisant le graphe, la valeur de les intégrales suivantes :

(a) $\displaystyle\int_2^6 -\frac{1}{2}x+5\,\mathrm{d}x$:



(b) $\displaystyle\int_2^6 \frac{1}{2}x\,\mathrm{d}x$:



Propriété 3 :

Pour une fonction négative, la surface délimitée de la même façon que précédemment, aura une aire en unité d'aire égale à l'opposée de l'intégrale :

$$\mathscr{A} = -\int_a^b f(t)\,\mathrm{d}t \text{ U}$$

où U est l'unité d'aire du repère.

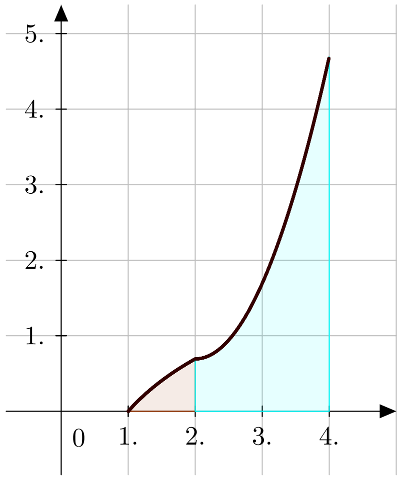
III Propriétés

Propriété 4 :

Relation de Chasles

Pour f une fonction continue sur D_f, et a , b, c dans D_f, on a :

$$\int_a^c f(t)\,\mathrm{d}t = \int_a^b f(t)\,\mathrm{d}t + \int_b^c f(t)\,\mathrm{d}t$$



Propriété 5 :

Pour f une fonction continue sur D_f, et a , b dans D_f, on a :

$$\int_a^a f(t)\,\mathrm{d}t = 0$$

$$\int_a^b f(t)\,\mathrm{d}t = -\int_b^a f(t)\,\mathrm{d}t$$

Propriété 6 :

Linéarité

Pour f et g deux fonctions continues sur D, et a , b dans D, on a :

$$\int_a^b f(t) + g(t)\,\mathrm{d}t = \int_a^b f(t)\,\mathrm{d}t + \int_a^b g(t)\,\mathrm{d}t$$

Pour tout réel k :

$$\int_a^b kf(t)\,\mathrm{d}t = k\int_a^b f(t)\,\mathrm{d}t$$

Exemple 2 :

Pour f définie sur $[1,3]$ par $f(x) = 2x + 5e^x$:

$$\int_1^3 2x + 5e^x \,\mathrm{d}t = \int_1^3 2x \,\mathrm{d}t + 5\int_1^3 e^x \,\mathrm{d}t$$

Propriété 7 :

Positivité

Pour f et g deux fonctions continues sur D, et a , b dans D, on a :

$$\forall x \in [a,b], f(x) \leqslant g(x) \Rightarrow \int_a^b f(t)\,\mathrm{d}t \leqslant \int_a^b g(t)\,\mathrm{d}t$$

Et :

$$\forall x \in [a,b], f(x) \geqslant 0 \Rightarrow \int_a^b f(t)\,\mathrm{d}t \geqslant 0$$

IV Applications

Propriété 8 :

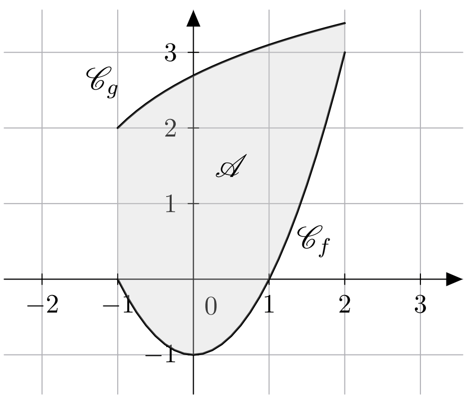
Aire entre deux courbes

Pour f et g deux fonctions continues sur D, avec $f(x) \leqslant g(x)$.

La valeur $\mathscr{A}$ de l'aire, en unité d'aire, de la surface délimitée par les droites d'équations $x = a$, $x = b$, la courbe $\mathscr{C}_f$ et la courbe $\mathscr{C}_g$ est donnée :

$$\mathscr{A} = \int_a^b g(t) - f(t)\,\mathrm{d}t \text{ U}$$

où U est l'unité d'aire du repère.



Propriété 9 :

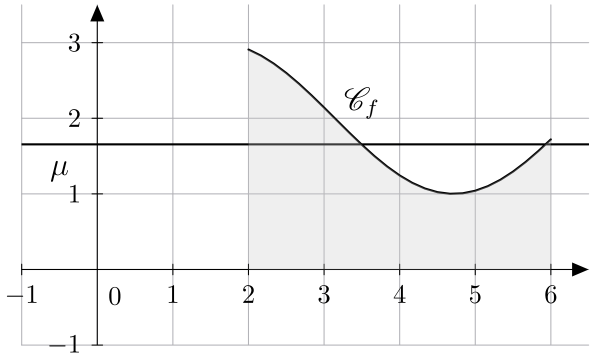
Valeur Moyenne

Pour f une fonction continue sur $[a, b]$

On appelle valeur moyenne de f le réel μ défini par :

$$\mu = \frac{1}{b-a}\int_a^b f(t)\,\mathrm{d}t$$

Pour une fonction positive, cette valeur correspond à la hauteur du rectangle de largeur $(b-a)$ dont l'aire coïncide avec l'aire sous la courbe.



Exercice 3 : Déterminer la valeur moyenne de la fonction définie par $f(x) = 3e^{-2x+1}$ sur l'intervalle $[0, 1]$.