Fonctions dérivées

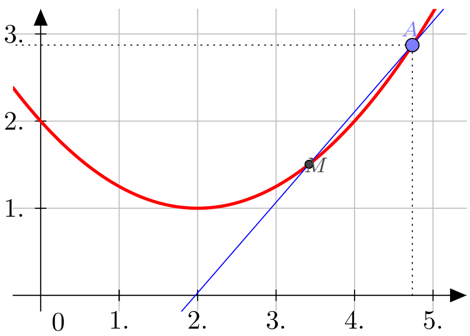
Dans tout le chapitre, f désigne une fonction définie sur un intervalle I, et on note $\mathscr{C}$ sa courbe représentative dans un repère orthonormé.

I Dérivée en un point

Définition 1 :

Soit $a \in I$

Si le quotient $\dfrac{f(a+h)-f(a)}{h}$ tend vers un réel l quand h tend vers 0, alors on dira que f est dérivable en a . Cette limite est appelée nombre dérivé de la fonction f en a et se note $f'(a)$. La quotient $T_{f,a}(h) = \dfrac{f(a+h)-f(a)}{h}$ s'appelle le taux d'accroissement de f en a.



Exemple 1 :

Pour la fonction f définie sur $\mathbb{R}$ par $f(x) = x^2$, en prenant $a = 2$, on a :

$T_{f,2}(h) = \dfrac{f(2+h)-f(2)}{h} = \dfrac{(2+h)^2-2^2}{h} = \dfrac{4h+h^2}{h} = 4+h$

On a donc : $\lim\limits_{h\to 0} T_{f,2}(h) = 4$. On dira donc que f est dérivable en 4, et que $f'(2) = 4$

II Fonction dérivée

Définition 2 :

La fonction f est dite dérivable sur I lorsqu'elle est dérivable en tout point a de I. La fonction qui à tout x de I associe le nombre dérivé de f en x est appelée fonction dérivée de f. On la note f'.

Exemple 2 :

Pour la fonction f définie sur $\mathbb{R}$ par $f(x) = x^2$, en prenant $x \in I$, on a :

$T_{f,x}(h) = \dfrac{f(x+h)-f(x)}{h} = \dfrac{(x+h)^2-x^2}{h} = \dfrac{2xh+h^2}{h} = 2x+h$

On a donc : $\lim\limits_{h\to 0} T_{f,x}(h) = 2x$. On dira donc que f est dérivable en tout point $x \in I$, et on a donc $f'(x) = 2x$

II Dérivées des fonctions usuelles

On note D_f l'ensemble de définition de la fonction f, et I l'intervalle(s) sur le(s)quel(s) la fonction est dérivable :

D_f	$f(x)$	I	$f'(x)$
$\mathbb{R}$	$k \in \mathbb{R}$	$\mathbb{R}$	0
$\mathbb{R}$	x	$\mathbb{R}$	1
$\mathbb{R}$	x^2	$\mathbb{R}$	$2x$
$\mathbb{R}$	x^n avec $n \in \mathbb{N}^*$	$\mathbb{R}$	nx^{n-1}
$\mathbb{R}^*$	$\frac{1}{x}$	$]-\infty, 0[$ ou $]0, +\infty[$	$-\frac{1}{x^2}$
$\mathbb{R}^*$	$\frac{1}{x^n}$ avec $n \in \mathbb{N}^*$	$]-\infty, 0[$ ou $]0, +\infty[$	$-\frac{n}{x^{n+1}}$
$\mathbb{R}^+$	$\sqrt{x}$	$]0, +\infty[$	$\frac{1}{2\sqrt{x}}$
$\mathbb{R}_+^*$	$\ln(x)$	$\mathbb{R}_+^*$	$\frac{1}{x}$
$\mathbb{R}$	e^x	$\mathbb{R}$	e^x

III Opérations sur les dérivées

Propriété 1 :

On considère deux fonctions u et v dérivables sur I.

- Pour $k \in \mathbb{R}$. La fonction ku est dérivable sur I, et $(ku)' = ku'$.
- La fonction $u + v$ est dérivable sur I, et $(u + v)' = u' + v'$.
- La fonction uv est dérivable sur I, et $(uv)' = u'v + v'u$.
- Si $\forall x \in I$, $v(x) \neq 0$, La fonction $\frac{1}{v}$ est dérivable sur I, et $\left(\frac{1}{v}\right)' = -\frac{v'}{v^2}$.
- Si $\forall x \in I$, $v(x) \neq 0$, La fonction $\frac{u}{v}$ est dérivable sur I, et $\left(\frac{u}{v}\right)' = \frac{u'v - v'u}{v^2}$.

IV Composition

Propriété 2 :

On considère deux fonctions u sur I.

- $(e^u)' = u'e^u$.
- Pour $u > 0$ sur I : $(\ln(u))' = \dfrac{u'}{u}$.

V Tangente à la courbe

Propriété 3 :

Soit $a \in I$. Si f est dérivable en a, alors la courbe $\mathscr{C}$ admet au point $(a, f(a))$ une tangente de coefficient directeur $f'(a)$.

Propriété 4 :

Soit $a \in I$. Si f est dérivable en a, alors la courbe $\mathscr{C}$ admet au point $(a, f(a))$ une tangente d'équation :

$$y = f'(a)(x - a) + f(a)$$

VI Variations

Propriété 5 :

Soit f est dérivable sur I, les variations de la fonction f sont données par le signe de la dérivée :

- Si $f'(x)$ est positive sur I, alors f est croissante sur I.
- Si $f'(x)$ est négative sur I, alors f est décroissante sur I.

VII Minimum, maximum

Propriété 6 :

Pour une fonction f définie sur I. Si la dérivée s'annule en changeant de signe, alors la fonction admet en ce point un extrémum local.