

Fonctions de références

1 Fonctions affines :

Définition 1 :

On dira que la fonction f définie sur $\mathbb{R}$ est une fonction affine si il existe deux réels a et b tel que :

$$\forall x \in \mathbb{R} \quad f(x) = ax + b$$

a est appelé coefficient directeur.

b est appelé ordonnée à l'origine.

Exemple 1 :

- La fonction f définie sur $\mathbb{R}$ par $f(x) = 3x + 5$ est une fonction affine, son coefficient directeur est $a = 3$, son ordonnée à l'origine est $b = 5$.
- La fonction g définie sur $\mathbb{R}$ par $g(x) = -x$ est une fonction affine, son coefficient directeur est $a = -1$, son ordonnée à l'origine est $b = 0$.

Exercice 1 : Pour les fonctions suivantes, définies sur $\mathbb{R}$, déterminer le coefficient directeur et l'ordonnée à l'origine des fonctions affines suivantes :

1. $f_1(x) = x + 1 + 2x - 4$

2. $f_2(x) = 2(2x + 5) + 4$

3. $f_3(x) = 3x + 4 - 5(x + 1)$

4. $f_4(x) = 2x + 7 - (2x + 3)$

5. $f_5(x) = x(4x + 1) - (2x + 3)^2$

6. $f_6(x) = (x - 1)^2 - (x + 1)^2$

2 Fonctions polynômes :

2.1 Trinôme

Définition 2 :

On dira que la fonction P définie sur $\mathbb{R}$ est un trinôme si elle admettant une écriture polynomiale soit :

$$\exists (a, b, c) \in \mathbb{R}^* \times \mathbb{R} \times \mathbb{R} \text{ tel que } \forall x \in \mathbb{R}, P(x) = ax^2 + bx + c$$

Un trinôme est aussi appelé polynôme du second degré.

Exemple 2 :

- La fonction f définie sur $\mathbb{R}$ par $f(x) = 3x^2 - 2x + 5$ est un trinôme, on identifie les coefficients par : $a = 3$, $b = -2$, $c = 5$.
- La fonction g définie sur $\mathbb{R}$ par $g(x) = -x^2 + 2$ est un trinôme, on identifie les coefficients par : $a = -1$, $b = 0$, $c = 2$.
- La fonction h définie sur $\mathbb{R}$ par $h(x) = 8x + 7$ n'est pas un trinôme, il s'agit d'une fonction affine.

Exercice 2 : Pour les fonctions suivantes, définies sur $\mathbb{R}$, déterminer la forme polynomiale et identifier les coefficients a , b et c :

1. $f_1(x) = x(x + 1) + 2$

2. $f_2(x) = (2x + 5)^2$

3. $f_3(x) = (3x + 4)(5 - x)$

4. $f_4(x) = (2x - 3)(2x + 3)$

5. $f_5(x) = (4x + 1)(x - 4) + 3(5x + 2) - 2$

6. $f_6(x) = (x - 1)^2 + (x + 1)^2$

2.2 Équation du second degré :

Propriété 1 :

On considère le polynôme

$$P(x) = ax^2 + bx + c \text{ (où } a \text{ est un réel non nul)}$$

On note $\Delta = b^2 - 4ac$. La résolution de l'équation $P(x) = 0$ est donné par :

- Si $\Delta > 0$, alors l'équation admet deux solutions, appelées racines du polynôme, données par : $x_1 = \frac{-b + \sqrt{\Delta}}{2a}$ et $x_2 = \frac{-b - \sqrt{\Delta}}{2a}$;
- Si $\Delta = 0$, alors l'équation admet une seule solution, appelée racine double du polynôme, donnée par : $x_0 = -\frac{b}{2a}$;
- Si $\Delta < 0$, alors l'équation n'admet aucune solution réelle.

Exercice 3 : Déterminer les racines éventuelles des polynômes suivants :

1. $f_1(x) = x^2 - 5x + 6$

2. $f_2(x) = x^2 - \frac{10}{3}x + 1$

3. $f_3(x) = 2x^2 - 2x + 9$

4. $f_4(x) = 5x^2 + 3x - 2$

5. $f_5(x) = -4x^2 + 4x - 1$

6. $f_6(x) = -9x^2 + 1$

2.3 Signe d'un trinôme :

Propriété 2 :

On considère le polynôme $P(x) = ax^2 + bx + c$ (où a est un réel non nul).

On note $\Delta = b^2 - 4ac$:

- Si $\Delta > 0$, alors $P(x)$ est du signe de a "à l'extérieur des racines" :
Par exemple, si $a > 0$ et $x_1 < x_2$ on a :
 $\forall x \in]-\infty; x_1[\cup]x_2; +\infty[, P(x) > 0$
- Si $\Delta = 0$, alors le trinôme est du signe de a , en s'annulant en x_0 .
- Si $\Delta < 0$, alors le trinôme est strictement du signe de a .

Exercice 4 : Déterminer le tableau de signe des polynômes suivants :

1. $f_1(x) = -x^2 - 6$

2. $f_2(x) = 2x^2 + 4x - 30$

3. $f_3(x) = 5x^2 - 3x$

4. $f_4(x) = 6x^2 - 5x + 1$

5. $f_5(x) = \frac{1}{2}x^2 + 2x + 2$

6. $f_6(x) = 5x^2 - 3$

2.4 La parabole :



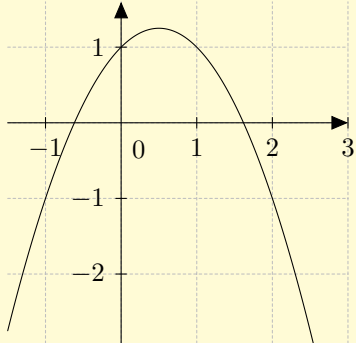
Définition 3 :

La représentation graphique d'un trinôme est appelée une parabole.

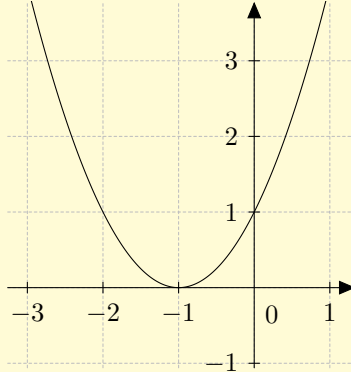


Exemple 3 :

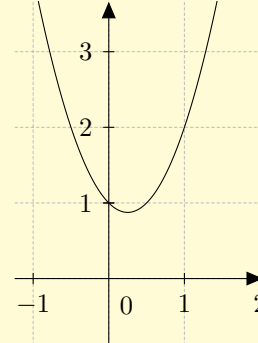
Avec $\Delta > 0$ et $a < 0$:



Avec $\Delta = 0$ et $a > 0$:



Avec $\Delta < 0$ et $a > 0$:



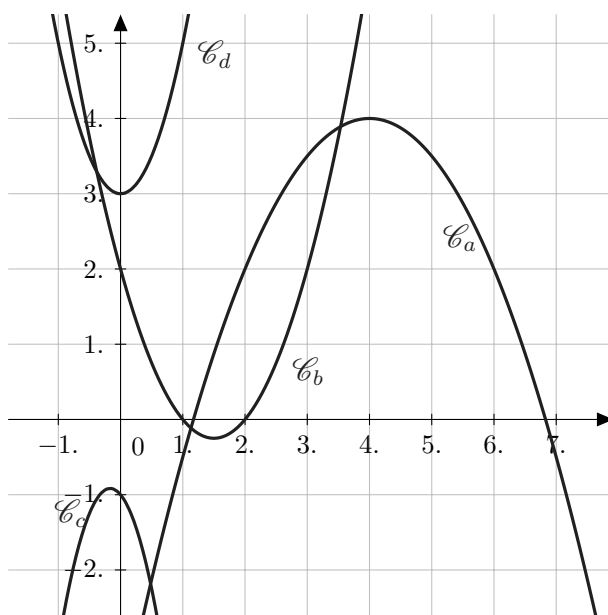
Exercice 5 : Associer les fonctions à leur courbe :

1. $f_1(x) = 2x^2 + 3$

2. $f_2(x) = x^2 - 3x + 2$

3. $f_3(x) = -\frac{1}{2}x^2 + 4x - 4$

4. $f_4(x) = -3x^2 - x - 1$



3 Fonction racine carrée

Définition 4 :

Soit a un réel positif. On appelle racine carrée de a , noté $\sqrt{a}$, l'unique nombre réel positif ayant pour carré a :

$$\forall a \in \mathbb{R}^+ \quad (\sqrt{a})^2 = a$$

Exemple 4 :

- $\sqrt{25} = 5$, car $5^2 = 25$.
- $\sqrt{49} = 7$, car $7^2 = 49$.

Propriété 3 :

- $\forall a \in \mathbb{R}^+, \sqrt{a^2} = a$.
- $\forall a \in \mathbb{R}^+ \text{ et } \forall b \in \mathbb{R}^+, \sqrt{a \times b} = \sqrt{a} \times \sqrt{b}$.
- $\forall a \in \mathbb{R}^+ \text{ et } \forall b \in \mathbb{R}^+, \sqrt{\frac{a}{b}} = \frac{\sqrt{a}}{\sqrt{b}}$.

Exercice 6 : Simplifier les radicaux suivants :

1. $A = \sqrt{75}$

3. $C = \sqrt{8}$

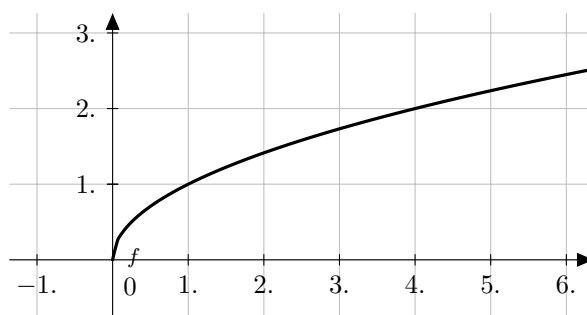
2. $B = \sqrt{20}$

4. $D = \sqrt{\frac{162}{125}}$

Définition 5 :

La fonction racine carrée est la fonction définie sur $\mathbb{R}^+$, qui à tout x de $\mathbb{R}^+$, associe $\sqrt{x}$:

$$\begin{array}{ccc} \sqrt{\cdot} : \mathbb{R}^+ & \longrightarrow & \mathbb{R}^+ \\ x & \longmapsto & \sqrt{x} \end{array}$$



4 Logarithme népérien

4.1 Définition :

Définition 6 :

On appelle logarithme népérien, noté $\ln$, l'unique fonction définie sur $\mathbb{R}^{+*}$ vérifiant les hypothèses suivantes :

- $\ln(1) = 0$.
- $\forall a \in \mathbb{R}^{+*}, \forall b \in \mathbb{R}^{+*}, \ln(a \times b) = \ln(a) + \ln(b)$.

Exemple 5 :

| $\ln(15) = \ln(3 \times 5) = \ln(3) + \ln(5)$

Propriété 4 :

- $\forall a \in \mathbb{R}^{+*}, \forall b \in \mathbb{R}^{+*}, \ln\left(\frac{a}{b}\right) = \ln(a) - \ln(b)$.
- $\forall a \in \mathbb{R}^{+*}, \ln\left(\frac{1}{a}\right) = -\ln(a)$.
- $\forall a \in \mathbb{R}^{+*}, \forall n \in \mathbb{N}, \ln(a^n) = n \ln(a)$.
- $\forall a \in \mathbb{R}^{+*}, \ln(\sqrt{a}) = \frac{1}{2} \ln(a)$.

Exercice 7: Écrire les nombres suivants à l'aide de $\ln(2)$ et $\ln(3)$:

1. $A = \ln(12)$

3. $C = \ln\left(\frac{1}{8}\right)$

2. $B = \ln(72)$

4. $D = \ln\left(\frac{16}{81}\right)$

Propriété 5 :

Il existe un nombre positif noté e vérifiant :

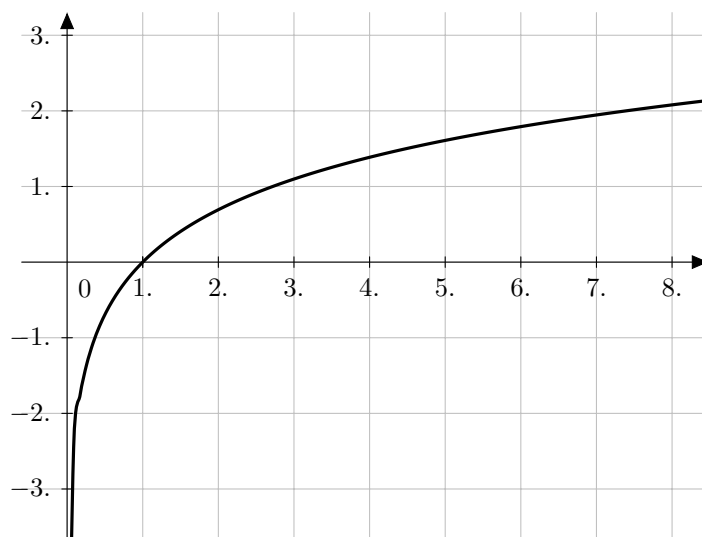
$$\ln(e) = 1$$

Une valeur approchée de e est : $e = 2,72$ à 10^{-2} près.

Exemple 6 :

| On a donc $\ln(e^5) = 5 \ln(e) = 5 \times 1 = 5$

4.2 Courbe :



Propriété 6 :

$$\ln(x) < 0 \Leftrightarrow 0 < x < 1$$

$$\ln(x) > 0 \Leftrightarrow x > 1$$

4.3 Équations :

Propriété 7 :

$$\forall x > 0 \quad \forall a > 0 \quad \ln(x) = \ln(a) \Leftrightarrow x = a$$

Exemple 7 :

$$\ln(x) = \ln(5) \Leftrightarrow x = 5$$

Exercice 8 : Résoudre dans $\mathbb{R}^{+*}$:

$$1. \ln(x) = \ln(2)$$

$$3. \ln(2x) = 0$$

$$2. \ln(3x) = \ln(5)$$

$$4. \ln(5x) = 1$$

Exercice 9 : Résoudre dans $]3; +\infty[$:

$$\ln(2x - 6) = \ln(1 + 7x)$$

5 Fonction exponentielle

5.1 Définition :

Définition 7 :

La fonction exponentielle, notée $\exp$, est la fonction définie sur $\mathbb{R}$ par $\exp(x) = e^x$, e^x étant l'unique nombre réel strictement positif dont le logarithme népérien est x .

Propriété 8 :

- Pour tout réel x , $e^x > 0$.
- $e^1 = e$
- $e^0 = 1$
- Pour tout réel x , $\ln(e^x) = x$.
- Pour tout réel $x > 0$, $e^{\ln x} = x$.
- Pour tout réel x et tout réel $y > 0$:

$$y = e^x \Leftrightarrow \ln(y) = x$$

Exemple 8 :

- $e^{-5} > 0$.
- $\ln(e^7) = 7$.
- $e^{\ln 3} = 3$.

Exercice 10 : Résoudre dans $\mathbb{R}$ les équations suivantes :

1. $e^x = 5$

3. $e^{2x} = 7$

2. $e^x = -3$

4. $e^{3+x} = 1$

5.2 Propriétés algébriques

Propriété 9 :

- $\forall a \in \mathbb{R}, \forall b \in \mathbb{R}, e^{a+b} = e^a \times e^b$.
- $\forall a \in \mathbb{R}, \forall b \in \mathbb{R}, e^{a-b} = \frac{e^a}{e^b}$.
- $\forall a \in \mathbb{R}, e^{-a} = \frac{1}{e^a}$.
- $\forall a \in \mathbb{R}, \forall b \in \mathbb{R}, (e^a)^b = e^{ab}$.
- $\forall a \in \mathbb{R}, \sqrt{e^a} = e^{\frac{a}{2}}$.

Exemple 9 :

$$\bullet e^5 \times e^3 = e^8$$

$$\bullet \frac{e^3}{e^7} = e^{-4}$$

$$\bullet \frac{1}{e^5} = e^{-5}$$

$$\bullet (e^3)^5 = e^{15}$$

$$\bullet \sqrt{e^8} = e^4$$

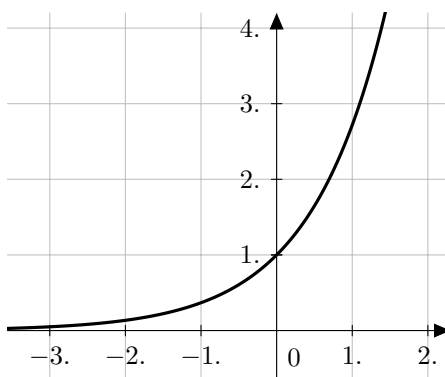
Exercice 11 : Simplifier les expressions suivantes :

$$1. A = e^8 \times e^{-3}$$

$$2. B = \frac{e^6}{e^2}$$

$$3. C = (e^5)^4$$

$$4. D = \frac{e^5 \times e^7}{e^{-2} \times e}$$

5.3 Courbe :**Propriété 10 :**

$$e^x < 1 \Leftrightarrow x < 0$$

$$e^x > 1 \Leftrightarrow x > 0$$

5.4 Équations :**Propriété 11 :**

$$\forall x \in \mathbb{R} \quad \forall a \in \mathbb{R} \quad e^x = e^a \Leftrightarrow x = a$$

$$\forall x \in \mathbb{R} \quad \forall a \in \mathbb{R}^{+*} \quad e^x = a \Leftrightarrow x = \ln(a)$$

Exemple 10 :

$$e^x = e^3 \Leftrightarrow x = 3$$

$$e^x = 5 \Leftrightarrow x = \ln(5)$$

Exercice 12 : Résoudre dans $\mathbb{R}$ les équations suivantes :

$$1. e^x = e^9$$

$$2. e^{2x+3} = -3$$

$$3. e^{2x+3} = e^{5-7x}$$

$$4. e^{3x-2} = 5$$